**2021-2022学年第一学期期末高二数学复习专题**

**（立体几何与空间向量）**

**【知识梳理】**

一、空间向量的概念及运算：空间向量可以看作是平面向量的推广，有许多概念和运算与平面向量是相同的，如模、零向量、单位向量、相等向量、相反向量等概念，加法的三角形法则和平行四边形法则，减法的几何意义，数乘运算与向量共线的判断、数量积运算、夹角公式、求模公式等等；向量的基底表示和坐标表示是向量运算的基础．

1.向量数量积的应用技巧

(1)求夹角：设向量a，b所成的角为θ，则cos θ＝，进而可求两异面直线所成的角．

(2)求长度(距离)：运用公式|a|2＝a·a，可将线段长度的计算问题转化为向量数量积的计算问题．

[提醒]　求向量夹角，必须特别关注两向量的方向，注意向量夹角与异面直线所成角的区别．

2.用基底表示任一向量的方法

(1)线性运算法：用基底表示空间向量，一般要用到向量的加法、减法、数乘的运算法则，尤其是向量加法的平行四边形法则，向量加法、减法的三角形法则及向量的一些代数运算，将所求向量逐步向基向量过渡，直到全部用基向量表示．

(2)待定系数法：利用待定系数法解决有关问题时，先利用未知系数确定向量的线性表示，再根据空间向量基本定理建立对应系数之间的关系，将问题转化为方程(组)问题求解．

3.利用向量数量积判断或证明线线、线面垂直的思路

(1)由数量积的性质a⊥b⇔a·b＝0(a，b≠0)可知，要证两直线垂直，可分别构造与两直线平行的向量，只要证明这两个向量的数量积为0即可．

(2)用向量法证明线面垂直，离不开线面垂直的判定定理，需将线面垂直转化为线线垂直，然后利用向量法证明线线垂直即可．

二、空间夹角及距离

1．距离：空间中的距离是立体几何的重要内容，其内容主要包括：点点距，点线距，点面距，线线距，线面距，面面距.其中重点是点点距、点线距、点面距以及两异面直线间的距离．求距离的重点在点到平面的距离，直线到平面的距离和两个平面的距离可以转化成点到平面的距离，一个点到平面的距离也可以转化成另外一个点到这个平面的距离.

求距离的一般方法和步骤：应用各种距离之间的转化关系和“平行移动”的思想方法，把所求的距离转化为点点距、点线距或点面距求之，其一般步骤是：①找出或作出表示有关距离的线段；②证明它符合定义；③归到解某个三角形．若表示距离的线段不容易找出或作出，可用体积等积法计算求之.

设斜线段向量***a***，平面的法向量***b***，则.

2．夹角：空间中的各种角包括异面直线所成的角，直线与平面所成的角和二面角，要理解各种角的概念定义和取值范围，其范围依次为0°，90°、[0°，90°]和[0°，180°].

（1）两条异面直线所成的角

求法：①先通过其中一条直线或者两条直线的平移，找出这两条异面直线所成的角，然后通过解三角形去求得；②通过两条异面直线的方向量所成的角来求得，但是注意到异面直线所成角得范围是，向量所成的角范围是，如果求出的是钝角，要注意转化成相应的锐角.

设两条异面直线*a*，*b*的方向向量为***a***，***b***，其夹角为*θ*，则cos *φ*＝|cos *θ*|＝(其中*φ*为异面直线*a*，*b*所成的角)．

（2）直线和平面所成的角：求法：“一找二证三求”，三步都必须要清楚地写出来.除特殊位置外，主要是指平面的斜线与平面所成的角，根据定义采用“射影转化法”.

设直线*l*的方向向量为***e***，平面*α*的法向量为***n***，直线*l*与平面*α*所成的角为*φ*，两向量***e***与***n***的夹角为*θ*，则有sin *φ*＝|cos *θ*|＝.

（3）二面角的度量是通过其平面角来实现的

解决二面角的问题往往是从作出其平面角的图形入手，所以作二面角的平面角就成为解题的关键.通常的作法有：（Ⅰ）定义法；（Ⅱ）利用三垂线定理或逆定理；（Ⅲ）自空间一点作棱垂直的垂面，截二面角得两条射线所成的角，俗称垂面法．此外，当作二面角的平面角有困难时，可用射影面积法解之，cos α＝，其中*S* 为斜面面积，*S*′为射影面积，α为斜面与射影面所成的二面角.

求二面角的大小：①如图①，*AB*，*CD*是二面角*α*－*l*－*β*的两个面内与棱*l*垂直的直线，则二面角的大小*θ*＝〈，〉．



②如图②③，***n***1，***n***2分别是二面角*α*－*l*－*β*的两个半平面*α*，*β*的法向量，则二面角的大小*θ*＝〈***n***1，***n***2〉(或π－〈***n***1，***n***2〉)．

利用平面的法向量求二面角的大小时，二面角是锐角或钝角由图形决定．由图形知二面角是锐角时cos *θ*＝；由图形知二面角是钝角时，cos *θ*＝－.当图形不能确定时，要根据向量坐标在图形中观察法向量的方向，从而确定二面角与向量***n***1，***n***2的夹角是相等(一个平面的法向量指向二面角的内部，另一个平面的法向量指向二面角的外部)，还是互补(两个法向量同时指向二面角的内部或外部)．

【典例精讲】

一、空间向量的有关概念与运算

1.已知平面$α$内两向量$\vec{a}=(1,$1，$1)$，$\vec{b}=(0,$2，$−1)$，若$\vec{c}$为平面$α$的法向量且$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}+(4,−4,1)$，则*m*，*n*的值分别为$($    $)$

A. $−1$，2 B. 1，$−2$ C. 1，2 D. $−1$，$−2$

2.已知$\vec{OA}=\left(1,2,3\right),\vec{OB}=\left(2,1,2\right),\vec{OC}=\left(1,1,2\right),$点*M*在直线*OC*上运动$.$当$\vec{MA}⋅\vec{MB}$取最小值时，点*M*的坐标为$($       $)$

A. $(2,2,4)$ B. $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ C. $(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3})$ D. $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$

3.下面命题正确的个数是$(    )$

$①$若$\overset{\to }{p} =2\overset{\to }{x} +3\overset{\to }{y} $，则$\overset{\to }{p} $与$\overset{\to }{x} $，$\overset{\to }{y} $共面；$②$若，则$M,P,A,B$共面；

$③$若，则$A,B,C,D$共面；

$④$若，则$P,A,B,C$共面；

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4.（多选）设$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间的一组基底，则下列结论正确的是$($       $)$

A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$可以为任意向量；B. 对空间任一向量$\vec{p}$，存在唯一有序实数组$(x,$*y*，$z)$，使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

C. 若$\vec{a}⊥\vec{b}$，$\vec{b}⊥\vec{c}$，则$\vec{a}⊥\vec{c}$；D. $\{\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}+2\vec{c},\vec{c}+2\vec{a}\}$可以作为构成空间的一组基底

5.（多选）如图，一个结晶体的形状为平行六面体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$，其中，以顶点*A*为端点的三条棱长均为6，且它们彼此的夹角都是$60^{∘}$，下列说法中不正确的是$($    $)$

A. $AC\_{1}=6$ B. $AC\_{1}⊥BD$

C. 向量$\overset{\to }{B\_{1}C}$与$\overset{\to }{AA\_{1}}$的夹角是$60^{∘}$ D. $BD\_{1}$与*AC*所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

**6．**已知向量**a，b，*|*a*|*＝6，|b|＝8，〈a，b〉＝120°，**则**a**在**b**上的投影向量为\_**\_\_\_\_\_，*b*在*a***上的投影向量为\_\_\_**\_\_\_\_\_．**

二、空间夹角

1．（多选）若将正方形*ABCD*沿对角线*BD*折成直二面角，则下列结论正确的有(　　)

A．*AD*与*BC*所成的角为45°； B．*AC*与*BD*所成的角为90°

C．*BC*与平面*ACD*所成角的正弦值为；

D．平面*ABC*与平面*BCD*的夹角的正切值是

2.如图，在三棱锥*S*­*ABC*中，*SA*＝*SB*＝*SC*，且∠*ASB*＝∠*BSC*＝∠*CSA*＝，*M*，*N*分别是*AB*和*SC*的中点，则异面直线*SM*与*BN*所成角的余弦值为\_\_\_\_\_\_，直线*SM*与平面*SAC*所成角的大小为\_\_\_\_\_\_**．**

**3.如图，在正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$中，点*O*为线段*BD*的中点．设点*P*在线段$B\_{1}C\_{1}$上，直线*OP*与平面$A\_{1}BD$所成的角为$α$，则$sinα$的取值范围是$(    )$

*A.* $[\frac{\sqrt{6}}{3},1]$ *B.* $[\frac{\sqrt{2}}{3},1]$ *C.* $[\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}]$ *D.* $[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}]$

4.如图，在直三棱柱*ABC*­*A*1*B*1*C*1中，*A*1*A*⊥平面*ABC*，∠*BAC*＝60°，*A*1*A*＝4，*AB*＝*AC*＝2.*F*为棱*AA*1上的动点，*D*是*BC*1上的点且*BD*＝*DC*1.

(1)若*DF*∥平面*ABC*，求的值；

(2)当的值为多少时，直线*A*1*C*1与平面*BFC*1所成角的正弦值为？

5.如图，在圆柱*W*中，点*O*1，*O*2分别为上、下底面的圆心，平面*MNFE*是轴截面，点*H*在上底面圆周上(异于点*N*，*F*)，点*G*为下底面圆弧*ME*的中点，点*H*与点*G*在平面*MNFE*的同侧，圆柱*W*的底面半径为1，高为2.

(1)若平面*FNH*⊥平面*NHG*，求证：*NG*⊥*FH*；

(2)若直线*NH*与平面*NFG*所成线面角*α*的正弦值等于，求证：平面*NHG*与平面*MNFE*的夹角大于.

三、空间距离

1.如图所示，在空间直角坐标系中有长方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1，*AB*＝1，*BC*＝2，*AA*1＝3，则点*B*到直线*A*1*C*的距离为(　　)

A. B． C. D．1

2.在棱长为2的正方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*E*，*F*分别为棱*AA*1，*BB*1的中点，*G*为棱*A*1*B*1上的一点，且*A*1*G*＝*λ*(0＜*λ*＜2)，则点*G*到平面*D*1*EF*的距离为(　　)

A．2 B． C. D．

3.如图，已知长方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*A*1*A*＝5，*AB*＝12，则直线*B*1*C*1到平面*A*1*BCD*1的距离是(　　)

A．5 B．8 C. D．

4．在正四棱柱*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*AA*1＝4，*AB*＝*BC*＝2，动点*P*，*Q*分别在线段*C*1*D*，*AC*上，则线段*PQ*长度的最小值是(　　)

A.　　 B． C.　　 D．

5.如图，直三棱柱$ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，侧棱长为2，$AC=BC=1$，$∠ACB=90^{∘}$，点*D*是$A\_{1}B\_{1}$的中点，*F*是侧面$AA\_{1}B\_{1}B($含边界$)$上的动点$.$要使$AB\_{1}⊥$平面$C\_{1}DF$，则线段$C\_{1}F$的长的最大值为$($     $)$

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ D. $\sqrt{5}$

**四、综合题**

1.如图，在直三棱柱$ABC−A\_{1}B\_{1}C\_{1}$中，$AA\_{1}=AC=\frac{2}{3}AB=2$，$AB⊥AC$，点*D*，*E*分别是线段*BC*，$B\_{1}C$上的动点$($不含端点$)$，且$\frac{EC}{B\_{1}C}=\frac{DC}{BC}.$则下列说法正确的是$($    $)$

A. $ED//$平面$ACC\_{1}$； B. 该三棱柱的外接球的表面积为$68π$

C. 异面直线$B\_{1}C$与$AA\_{1}$所成角的正切值为$\frac{3}{2}$； D. 二面角$A−EC−D$的余弦值为$\frac{4}{13}$

2.在正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$中，$AB=4$，*E*，*F*分别为$BB\_{1},CD$的中点，*P*是$BC\_{1}$上的动点，则$($    $)$

A. $A\_{1}F⊥$平面$AD\_{1}E$

B. 平面$AD\_{1}E$截正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$的截面面积为18

C. 三棱锥$P−AD\_{1}E$的体积与*P*点的位置有关

D. 过*AE*作正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$的外接球的截面，所得截面圆的面积的最小值为$5π$

3.已知正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$棱长为2，如图，*M*为$CC\_{1}$上的动点，$AM⊥$平面$α.$下面说法正确的是$($    $)$

A. 直线*AB*与平面$α$所成角的正弦值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B. 点*M*与点$C\_{1}$重合时，平面$α$截正方体所得的截面，其面积越大，周长就越大

C. 点*M*为$CC\_{1}$的中点时，若平面$α$经过点*B*，则平面$α$截正方体所得截面图形是等腰梯形

D. 己知*N*为$DD\_{1}$中点，当$AM+MN$的和最小时，*M*为$CC\_{1}$的中点

4.在棱长固定的正方体$ABCD–A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$中，点*E*，*F*分别满足$\vec{AE}=λ\vec{AB}$，$\vec{BF}=μ\vec{BC}$，$(λ\in \left[0, 1\right],μ\in [0, 1])$，则$($    $)$

A. 当$μ=\frac{1}{2}$时，三棱锥$A\_{1}−B\_{1}EF$的体积为定值；B. 当$μ=\frac{1}{2}$时，存在$λ$使得*B*$D\_{1}⊥$平面$B\_{1}$*EF*

C. 当$λ=\frac{1}{2}$时，点*A，B*到平面$B\_{1}$*EF*的距离相等；D. 当$λ=μ$时，总有$A\_{1}$*F*$⊥C\_{1}$*E*

**【利用空间向量解决探索性问题】**

5.如图，已知三棱柱ABC－A1B1C1的侧棱与底面垂直，AA1＝AB＝AC＝1，AB⊥AC，M、N分别是CC1，BC的中点，点P在直线A1B1上，且

A1

C1

B1

M

C

N

B

A

P

（1）证明：无论入取何值，总有AM⊥PN；

（2）当入取何值时，直线PN与平面ABC所成的角θ最大？

并求该角取最大值时的正切值。

（3）是否存在点P，使得平面PMN与平面ABC所成的二面

角为30º，若存在，试确定点P的位置，若不存在，请说明理由。

**【立体几何中的作图问题】**

6.如图，在以为顶点的多面体中，

，, ∥， ，

，．

（Ⅰ）请在图中作出平面，使得，且∥，并说明理由；

（Ⅱ）求直线和平面所成角的正弦值.

【**翻折问题（平面-立体）、最值问题**】

7．如图，在边长为4的菱形中，．点分别在边上，点与点、不重合，，．沿将△翻折到△的位置，使平面⊥平面．

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）当取得最小值时，请解答以下问题：

（ⅰ）求四棱锥的体积；

（ⅱ）若点满足，试探究：直线与平面所成角的大小是否一定大于？并说明你的理由．

****

**【动点、取值范围】**

8.如图，在梯形中，，，四边形为矩形，平面平面，.

（I）求证：平面；

****（II）点在线段上运动，设平面与平面所成二面角的平面角为，试求的取值范围.