**第一讲 数与式的运算**

 **绝对值：**



**二、乘法公式**

**【公式1】**

**【例1】计算：**

**说明：多项式乘法的结果一般是按某个字母的降幂或升幂排列。**

**【公式2】(立方和公式)**

**【例2】计算：**

**【公式3】(立方差公式)**

**【例3】计算：**

**（1） （2）**

**（3） （4）**

**说明：（1）在进行代数式的乘法、除法运算时，要观察代数式的结构是否满足乘法公式的**

 **结构。**

 **（2）为了更好地使用乘法公式，记住1、2、3、4、…、20的平方数和1、2、3、4、…、**

 **10的立方数，是非常有好处的。**

**【例4】已知，求 的值。**

**说明：本题若先从方程中解出的值后，再代入代数式求值，则计算较烦琐．**

 **本题是根据条件式与求值式的联系，用整体代换的方法计算，简化了计算。**

 **请注意整体代换法。本题的解法，体现了“正难则反”的解题策略，**

 **根据题求利用题知，是明智之举。**

**【例5】已知，求的值。**

**说明：注意字母的整体代换技巧的应用。**

**二、根式**

**式子叫做二次根式，其性质如下：**

 **(1)  (2) **

 **(3)  (4) **

**【例6】化简下列各式：**

**(1)  (2) **

**说明：请注意性质的使用：**

**当化去绝对值符号但字母的范围未知时，要对字母的取值分类讨论。**

**【例7】计算(没有特殊说明，本节中出现的字母均为正数)：**

**(1)  (2)  (3) **

**说明：(1)二次根式的化简结果应满足：①被开方数的因数是整数，因式是整式；**

 **②被开方数不含能开得尽方的因数或因式。**

1. **二次根式的化简常见类型有下列两种：**

**①被开方数是整数或整式。化简时，先将它分解因数或因式，然后把开得尽方的**

 **因数或因式开出来；**

 **②分母中有根式(如)或被开方数有分母(如)．这时可将其化为形式**

 **(如可化为) ，转化为 “分母中有根式”的情况．化简时，要把分母中**

 **的根式化为有理式，采取分子、分母同乘以一个根式进行化简．**

 **(如化为，其中与叫做互为有理化因式)。**

**【例8】计算：**

**(1)  (2) **

**说明：有理数的的运算法则都适用于加法、乘法的运算律以及多项式的乘法公式、**

 **分式二次根式的运算。**

**【例9】设，求的值．**

**说明：有关代数式的求值问题：(1)先化简后求值；(2)当直接代入运算较复杂时，可根据结论**

 **的结构特点，倒推几步，再代入条件，有时整体代入可简化计算量。**

**三、分式**

**当分式的分子、分母中至少有一个是分式时，就叫做繁分式，**

**繁分式的化简常用以下两种方法：(1) 利用除法法则；(2) 利用分式的基本性质．**

**【例10】化简**

**说明：解法一的运算方法是从最内部的分式入手，采取通分的方式逐步脱掉繁分式，**

 **解法二则是利用分式的基本性质进行化简．**

 **一般根据题目特点综合使用两种方法。**

**【例11】化简**

**说明：(1) 分式的乘除运算一般化为乘法进行，当分子、分母为多项式时，应先因式分**

 **解再进行约分化简；(2) 分式的计算结果应是最简分式或整式。**

 **第二讲 因式分解**

**因式分解的方法较多，除了初中课本涉及到的提取公因式法和公式法(平方差公式和完全平方公式)外，还有公式法(立方和、立方差公式)、十字相乘法和分组分解法等等。**

**一、公式法(立方和、立方差公式)**

**在第一讲里，我们已经学习了乘法公式中的立方和、立方差公式：**

** (立方和公式)**

** (立方差公式)**

**由于因式分解与整式乘法正好是互为逆变形，所以把整式乘法公式反过来写，就得到：**

****

****

**这就是说，两个数的立方和(差)，等于这两个数的和(差)乘以它们的平方和与它们积的差(和)。**

**运用这两个公式，可以把形式是立方和或立方差的多项式进行因式分解。**

**【例1】用立方和或立方差公式分解下列各多项式：**

 **(1)  (2) **

**说明：(1) 在运用立方和(差)公式分解因式时，经常要逆用幂的运算法则，如，这里逆用了法则；(2) 在运用立方和(差)公式分解因式时，一定要看准因式中各项的符号。**

**【例2】分解因式：(1)  (2) **

**二、分组分解法**

**从前面可以看出，能够直接运用公式法分解的多项式，主要是二项式和三项式。而对于四项以上的多项式，如既没有公式可用，也没有公因式可以提取。因此，可以先将多项式分组处理。这种利用分组来因式分解的方法叫做分组分解法。分组分解法的关键在于如何分组。**

**1．分组后能提取公因式**

**【例3】把分解因式。**

**说明：用分组分解法，一定要想想分组后能否继续完成因式分解，由此合理选择分组的方法。【例4】把分解因式。**

**说明：由例3、例4可以看出，分组时运用了加法结合律，而为了合理分组，先运用了加法交换律，分组后，为了提公因式，又运用了分配律。由此可以看出运算律在因式分解中所起的作用。**

**2．分组后能直接运用公式**

**【例5】把分解因式。**

**【例6】把分解因式。**

**说明：从例5、例6可以看出：如果一个多项式的项分组后，各组都能直接运用公式或提取公因式进行分解，并且各组在分解后，它们之间又能运用公式或有公因式，那么这个多项式就可以分组分解法来分解因式。**

**三、十字相乘法**

 **1．型的因式分解**

 **这类式子在许多问题中经常出现，其特点是：**

1. **二次项系数是1；(2) 常数项是两个数之积；**

**(3) 一次项系数是常数项的两个因数之和。**

****

**因此，**

**运用这个公式，可以把某些二次项系数为1的二次三项式分解因式。**

**【例7】把下列各式因式分解：**

 **(1)  (2) **

**说明：此例可以看出，常数项为正数时，应分解为两个同号因数，它们的符号与一次项系数的符号相同。**

**【例8】把下列各式因式分解：**

 **(1)  (2) **

**说明：此例可以看出，常数项为负数时，应分解为两个异号的因数，**

 **其中绝对值较大的因数与一次项系数的符号相同。**

**【例9】把下列各式因式分解：**

 **(1)  (2) **

**2．一般二次三项式型的因式分解**

**大家知道，．**

**反过来，就得到：**

**我们发现，二次项系数分解成，常数项分解成，把写成，这里按斜线交叉相乘再相加，就得到，如果它正好等于的一次项系数，那么就可以分解成，其中位于上一行，位于下一行。**

**这种借助画十字交叉线分解系数，从而将二次三项式分解因式的方法，叫做十字相乘法。**

**必须注意，分解因数及十字相乘都有多种可能情况，所以往往要经过多次尝试，才能确定一个二次三项式能否用十字相乘法分解。**

**【例10】把下列各式因式分解：**

**(1)  (2) **

**(3) (4)**

**(5)**

**说明：用十字相乘法分解二次三项式很重要．当二次项系数不是1时较困难，具体分解时，为提高速度，可先对有关常数分解，交叉相乘后，若原常数为负数，用减法”凑”，看是否符合一次项系数，否则用加法”凑”，先”凑”绝对值，然后调整，添加正、负号。**

**四、其它因式分解的方法**

 **1．配方法**

**【例11】分解因式**

**说明：这种设法配成有完全平方式的方法叫做配方法，配方后将二次三项式化为两个平方式，然后用平方差公式分解。当然，本题还有其它方法，请大家试验。**

**2．拆、添项法**

**【例12】分解因式**

**说明：本解法把原常数4拆成1与3的和，将多项式分成两组，满足系数对应成比例，造成可以用公式法及提取公因式的条件。本题还可以将拆成，将多项式分成两组和。**

**一般地，把一个多项式因式分解，可以按照下列步骤进行：**

**(1) 如果多项式各项有公因式，那么先提取公因式；**

**(2) 如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解；**

**(3) 如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组或其它方法(如十字相乘法)来分解；**

**(4) 分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止。**

**第三讲 一元二次方程根与系数的关系**

**一、一元二次方程的根的判断式**

**一元二次方程，用配方法将其变形为：**

**(1) 当时，右端是正数。因此，方程有两个不相等的实数根：**

**(2) 当时，右端是零。因此，方程有两个相等的实数根：**

**(3) 当时，右端是负数。因此，方程没有实数根。**

**由于可以用的取值情况来判定一元二次方程的根的情况。**

**因此，把叫做一元二次方程的根的判别式，**

**表示为：**

**【例1】不解方程，判断下列方程的实数根的个数：**

**(1)  (2)  (3) **

**说明：在求判断式时，务必先把方程变形为一元二次方程的一般形式。**

**【例2】已知关于的一元二次方程，根据下列条件，分别求出的范围：**

 **(1) 方程有两个不相等的实数根； (2) 方程有两个相等的实数根；**

 **(3)方程有实数根； (4) 方程无实数根。**

**【例3】已知实数、满足，试求、的值。**

**二、一元二次方程的根与系数的关系**

**一元二次方程的两个根为：**

**=, =**

**所以：，**

 ****

**定理：如果一元二次方程的两个根为，那么：**

****

**说明：一元二次方程根与系数的关系由十六世纪的法国数学家韦达发现，**

 **所以通常把此定理称为”韦达定理”。上述定理成立的前提是。**

**【例4】若是方程的两个根，试求下列各式的值：**

 **(1) ； (2) ； (3) ； (4) 。**

**说明：利用根与系数的关系求值，要熟练掌握以下等式变形：**

**，，，**

**，，**

**等等。韦达定理体现了整体思想。**

**【例5】已知关于的方程，根据下列条件，分别求出的值。**

**(1) 方程两实根的积为5； (2) 方程的两实根满足。**

**说明：根据一元二次方程两实根满足的条件，求待定字母的值，务必要注意方程有两实根的**

 **条件，即所求的字母应满足。**

**【例6】已知是一元二次方程的两个实数根。**

1. **是否存在实数，使成立？**

 **若存在，求出的值；若不存在，请您说明理由。**

**(2)求使的值为整数的实数的整数值。**

**说明：(1)存在性问题的题型，通常是先假设存在，然后推导其值，**

 **若能求出，则说明存在，否则即不存在。**

 **（2）本题综合性较强，要学会对为整数的分析方法。**

 **第四讲 不等式**

**初中阶段已经学习了一元一次不等式和一元一次不等式组的解法。高中阶段将进一步学习一元二次不等式和分式不等式等知识。本讲先介绍一些高中新课标中关于不等式必备知识。**

**一、一元二次不等式及其解法**

**1．形如****的不等式称为关于的一元二次不等式。**

**2．一元二次不等式与二次函数及一元二次方程的关系(简称：三个二次)。以二次函数为例：**

**(1) 作出图象；**

**(2) 根据图象容易看到，图象与轴的交点是，**

 **即当时，。**

 **就是说对应的一元二次方程的两实根是。**

1. **当时，，对应图像位于轴的上方。**

 **就是说的解是。**

 **当时，，对应图像位于轴的下方。**

 **就是说的解是。**

**一般地，一元二次不等式可以结合相应的二次函数、一元二次方程求解，步骤如下：**

**(1) 将二次项系数先化为正数；**

**(2) 观测相应的二次函数图象。**

**①如果图象与轴有两个交点，此时对应的一元二次方程有两个不相等**

 **的实数根(也可由根的判别式来判断)。**

**那么(图1)： **

** **

****

**②如果图象与轴只有一个交点，此时对应的一元二次方程有两个**

**相的实数根(也可由根的判别式来判断)。**

**那么(图2)： **

 **无解**

**③如果图象与轴没有交点，此时对应的一元二次方程没有实数根**

 **(也可由根的判别式来判断) 。**

**那么(图3)： 取一切实数**

 **无解**

**如果单纯的解一个一元二次不等式的话，可以按照一下步骤处理：**

**(1) 化二次项系数为正；**

**(2) 若二次三项式能分解成两个一次因式的积，则求出两根．**

 **那么“”型的解为(俗称两根之外)；**

 **“”型的解为(俗称两根之间)；**

1. **否则，对二次三项式进行配方，变成，**

 **结合完全平方式为非负数的性质求解。**

**【例1】解不等式。**

**说明：当把一元二次不等式化为的形式后，只要左边可以分解为两个一次因式，即可运用本题的解法。**

**【例2】解下列不等式：**

 **(1)  (2) （x-1）(x+2)(x-2)(2x+1)**

**分析：要先将不等式化为的形式，通常使二次项系数为正数。**

**【例3】解下列不等式：**

**(1)  (2)  (3) **

**【例4】已知对于任意实数，恒为正数，求实数的取值范围。**

**【例5】已知关于的不等式的解为，求的值。**

**说明：本例也可以根据方程有两根和，用代入法得：**

 **，，且注意，从而。**

**二、简单分式不等式的解法**

**【例6】解下列不等式：**

 **(1)  (2) **

**【例7】解不等式**

**说明：(1) 转化为整式不等式时，一定要先将右端变为0。**

 **(2) 本例也可以直接去分母，但应注意讨论分母的符号：**

****

**三、含有字母系数的一元二次不等式**

**一元一次不等式最终可以化为的形式。**

**(1) 当时，不等式的解为：；**

**(2) 当时，不等式的解为：；**

**(3) 当时，不等式化为：；**

 **① 若，则不等式无解；**

 **② 若b﹤0，则不等式的解是全体实数。**

**【例8】求关于的不等式的解。**

**【例9】已知关于的不等式的解为，求实数的值。**

**分析：将不等式整理成的形式，可以考虑只有当时，才有形如的解，**

 **从而令。**

**第五讲 二次函数的最值问题**

**二次函数是初中函数的主要内容，也是高中学习的重要基础。**

**在初中阶段大家已经知道：二次函数在自变量取任意实数时的最值情况**

**(当时，函数在处取得最小值，无最大值；**

 **当时，函数在处取得最大值，无最小值。)**

**本节我们将在这个基础上继续学习当自变量在某个范围内取值时，函数的最值问题。同时还将学习二次函数的最值问题在实际生活中的简单应用。**

**【例1】当时，求函数的最大值和最小值。**

**分析：作出函数在所给范围的及其对称轴的草图，观察图象的最高点和最低点，**

 **由此得到函数的最大值、最小值及函数取到最值时相应自变量的值。**

**【例2】当时，求函数的最大值和最小值。**

**【例3】当时，求函数的取值范围。**

**【例4】当时，求函数的最小值(其中为常数)。**

**分析：由于所给的范围随着的变化而变化，所以需要比较对称轴与其范围的相对位置。**

**【例5】某商场以每件30元的价格购进一种商品，试销中发现这种商品每天的销售量(件)**

 **与每件的销售价(元)满足一次函数。**

**(1) 写出商场卖这种商品每天的销售利润与每件销售价之间的函数关系式；**

**(2) 若商场要想每天获得最大销售利润，每件商品的售价定为多少最合适？**

 **最大销售利润为多少？**