**解答题专项训练六—坐标系与参数方程**

题型一：极坐标与直角坐标的互化。互化原理（三角函数定义）、数形结合。

1．在直角坐标系中，直线的参数方程为（为参数），以为极点，轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，并在两种坐标系中取相同的长度单位，曲线的极坐标方程为.

 （1）把曲线的极坐标方程化为普通方程；

 （2）求直线与曲线的交点的极坐标（）.

**试题解析：**（1）由得，两边同乘以，得；

（2）由直线的参数方程为（为参数），得直线的普通方程为，联立曲线与直线的方程得，或，化为极坐标为或.

考点：极坐标方程与直角坐标方程的互化，直线参数方程与普通方程的互化.

**考点：**，.

2．在极坐标系中，*O*为极点，点*M*(*ρ*0，*θ*0)(*ρ*0>0)在曲线*C*：*ρ*＝4sin *θ*上，直线*l*过点*A*(4,0)且与*OM*垂直，垂足为*P*.

(1)当*θ*0＝时，求*ρ*0及*l*的极坐标方程；

(2)当*M*在*C*上运动且*P*在线段*OM*上时，求*P*点轨迹的极坐标方程.

**试题解析：**(1)因为*M*(*ρ*0，*θ*0)在*C*上，当*θ*0＝时，*ρ*0＝4sin ＝2.

由已知得|*OP*|＝|*OA*|cos ＝2.设*Q*(*ρ*，*θ*)为*l*上除*P*的任意一点，连接*OQ*，在Rt△*OPQ*中，

*ρ*cos＝|*OP*|＝2.经检验，点*P*在曲线*ρ*cos＝2上.

所以，*l*的极坐标方程为*ρ*cos＝2.

(2)设*P*(*ρ*，*θ*)，在Rt△*OAP*中，|*OP*|＝|*OA*|cos *θ*＝4cos *θ*，即*ρ*＝4cos *θ*.

因为*P*在线段*OM*上，且*AP*⊥*OM*，故*θ*的取值范围是.

所以，*P*点轨迹的极坐标方程为*ρ*＝4cos *θ*，*θ*∈.

题型二：曲线（圆与椭圆）的参数方程。

（1）普通方程互化和最值问题。“1”的代换（）、三角解决。

3．已知曲线的参数方程是，以坐标原点为极点，轴的正半轴为极轴建立极坐标系，的极坐标分别为.

（Ⅰ）求直线的直角坐标方程；

（Ⅱ）设为曲线上的点，求点到直线距离的最大值.

**试题解析：**（Ⅰ）将、化为直角坐标为，即，， ∴直线的方程为，即．

（Ⅱ）设，它到直线的距离为

，（其中）， ∴．

4．已知在平面直角坐标系中，直线的参数方程是是参数） ，以原点为极点，轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线的极坐标方程为.（1）判断直线与曲线的位置关系；

 （2）设为曲线上任意一点，求的取值范围.

试题解析：（1）直线的普通方程为，

曲线的直角坐标系下的方程为，

因为圆心到直线的距离为,

所以直线与曲线的的位置关系为相离.

（2）设点，则.

5．已知平面直角坐标系，以为极点，轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，点的极坐标为，曲线的参数方程为（为参数）.

（1）写出点的直角坐标及曲线的直角坐标方程；

（2）若为曲线上的动点，求中点到直线的距离的最小值.

**试题解析：**（1）点的直角坐标，由，得，

所以曲线的直角坐标方程为.

（2）曲线的参数方程为（为参数），直线的普通方程为，

设，则，那么点到直线的距离

，

所以点到直线的最小距离为.

6.在直角坐标系中，直线倾斜角为，其参数方程为（为参数），在以原点为极点，轴非负半轴为极轴的极坐标系中（取相同的长度单位），曲线*C*的极坐标方程为．

（1）若直线与曲线*C*有公共点，求直线倾斜角的取值范围；

（2）设为曲线*C*上任意一点，求的取值范围．

**试题解析：**（1）法一：由曲线*C*的极坐标方程得，

∴曲线*C*的直角坐标方程为，即

∴曲线*C*是圆心为*C*(2, 0)，半径为2的圆.

∵直线*l*过点*P*(−2,0)，当*l*斜率不存在时，*l*的方程为*x*= ****2与曲线*C*没有公共点；

∴当直线*l*斜率存在时，设直线*l的方程为*：，即

直线与圆有公共点，则 

∴ ∵，∴的取值范围是

法二：∵曲线*C*的极坐标方程为，∴曲线*C*的直角坐标方程为， 将，代入整理得

∵直线与曲线有公共点，∴

即或，∵，∴的取值范围是

（2）法一：设，由于圆即与有交点，

∴   ∴的取值范围是．

法二：曲线的直角坐标方程为可化为

其参数方程为（为参数）, ∵为曲线上任意一点，

∴  , ∴的取值范围是．

（2）公共点问题。联立求解判别式，直线与圆d与r。

7．在直角坐标系中曲线的参数方程为（为参数）．若以直角坐标系中的原点为极点，轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线的极坐标方程为．

（1）求曲线的普通方程和曲线的直角坐标方程；

（2）若曲线与曲线有公共点，求实数的取值范围．

**试题解析：**（1）由得

，

又由得，

所以曲线的普通方程为，即，

又易知，∴曲线的普通方程为，．

由得，

所以，所以曲线的直角坐标方程为．

（2）当直线过点时，与曲线有公共点，此时，从该位置向左下方平行移动直到与曲线相切总有公共点，联立得，

，令，解得．∴．∴所求实数的取值范围是．

8．在直角坐标系中，直线的参数方程为（为参数）．在极坐标系（以原点为极点，以轴非负半轴为极轴，且与直角坐标系取相同的长度单位）中，圆的方程为．

（Ⅰ）求圆的直角坐标方程；

（Ⅱ）若直线与圆相切，求实数的值．

**试题解析：**

（Ⅰ）由，

∴圆的直角坐标方程为（或）；

（Ⅱ）直线的参数方程为，

∵圆的圆心为，半径，

由直线与圆相切，得或．

9．在极坐标系中，直线的极坐标方程为，以极点为原点极轴为轴的正半轴建立平面直角坐标系，曲线的参数方程为为参数，且).

（1）写出直线的直角坐标方程和曲线的普通方程；

（2）若直线与曲线有两个公共点，求的取值范围.

**试题解析：**（1）由直线的极坐标方程得：，

 即直线的直角坐标方程为：，

由曲线 的参数方程 为参数，且).

 得：

（2）设曲线上任意一点为，则，

直线与曲线 有两个公共点，.

题型三：直线参数方程（t的几何意义）。定点到动点的距离。

**定标图号联、韦达三定理。**、、

10．在直角坐标系中，直线的参数方程为，（为参数），在极坐标系（与直角坐标系取相同的长度单位，且以原点为极点，以轴正半轴为极轴）中，圆的极坐标方程为.

（1）求圆的直角坐标方程；

（2）设圆与直线交于点，若点的坐标为，求.

**试题解析：**（1）由，得，即.

（2）将的参数方程代入圆的直角坐标方程，得，

即.由于，故可设，是上述方程的两实根，

所以，又直线过点，故由上式及的几何意义得

.

11．在直角坐标系中，过点的直线的斜率为1，以坐标原点为极点，轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线的极坐标方程为,直线和曲线的交点为．

（1）求直线的参数方程；（2）求

**试题解析：**（Ⅰ）由条件知，直线的倾斜角，所以.

设点是直线上的任意一点，点到点的有向向量为，则 

（Ⅱ）曲线的直角坐标方程为,由此得,

即 . 设为此方程的两个根，因为和的交点为，

所以分别是点所对应的参数，由韦达定理得 =

12．在直角坐标系中，以原点为极点，以轴正半轴为极轴，圆的极坐标方程为.

（1）将圆的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）过点作斜率为1直线与圆交于两点，试求的值.

**试题解析：**（1）由，可得，

∴，∴，即

（2）过点作斜率为的直线的参数方程为（为参数）.

代入得，

设点对应的参数分别为，则，.

由的几何意义可得.

13．在直角坐标系中，直线的参数方程为（为参数），在极坐标系（与直角坐标系取相同的长度单位，且以原点为极点，以轴非负半轴为极轴）中，圆的方程为.

（1）求圆的直角坐标方程；

（2）若点，设圆与直线交于点，求的最小值.

**试题解析：**（1）由得，化为直角坐标方程为，即；

（2）将的参数方程代入圆的直角坐标方程，得

由，故可设是上述方程的两根，

所以，又直线过点，故结合的几何意义得



,所以的最小值为

题型四。跟踪点参数方程的求法。跟踪点法。

14．在直角坐标系 中,曲线的参数方程为, 是上的动点，点满足,记点的轨迹为曲线 ．

（1）求曲线的方程；

（2）在以为极点, 轴的正半轴为极轴的极坐标系中,射线与曲线的异于极点的交点为,与曲线的异于极点的交点为,求．

**试题解析：**（1）设则由条件知．由于在上,所以

 ,所以,从而的参数方程为．

（2）法一：曲线的极坐标方程为,曲线的极坐标方程为．

射线与的交点为的极径与的交点为的极径

所以 ．

**法二：垂径定理。**

15．在极坐标系中，已知圆C的圆心，半径r＝3．

（1）求圆C的极坐标方程；

（2）若点Q在圆C上运动，P在OQ的延长线上，且|OQ|∶|QP|＝3∶2，求动点P的轨迹方程．

【答案】（1）；（2）．

16.在直角坐标系*xOy*中，设*P*为⊙*O*：*x*2＋*y*2＝9上的动点，点*D*为*P*在*x*轴上的投影，动点*M*满足2＝，点*M*的轨迹为曲线*C*.以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线*l*的极坐标方程为*ρ*sin＝2，点*A*(*ρ*1,0)，*B*为直线*l*上两点.

(1)求曲线*C*的参数方程；

(2)是否存在*M*，使得△*MAB*的面积为8？若存在，有几个这样的点？若不存在，请说明理由.

**试题解析：**(1)设*P*(3cos *α*，3sin *α*)，*M*(*x*，*y*)，则*D*(3cos *α*，0).

由2＝，得即曲线*C*的参数方程为

(2)依题意，直线*l*：*x*＋*y*－4＝0，设点*M*(3cos *α*，sin *α*)，

设点*M*到直线*l*的距离为*d*，