泉州七中高二年上学期期末模拟试卷（一）2020.1.6

一、选择题（共12题。其中1~10题为单选题，11、12题为不定项选择题。）

1．已知*a*是实数，是纯虚数，则*a*等于(　　)

A．1 B．－1

C. D．－

答案　A

解析　＝＝是纯虚数，则*a*－1＝0，*a*＋1≠0，解得*a*＝1.

2.样本中共有五个个体，其值分别为*a,*0,1,2,3.若该样本的平均数为1，则样本方差为(　　)

A. B. C. D.2

答案　D

解析　∵样本的平均数为1，

即×(*a*＋0＋1＋2＋3)＝1，∴*a*＝－1.

∴样本方差*s*2＝×[(－1－1)2＋(0－1)2＋(1－1)2＋(2－1)2＋(3－1)2]＝2.

3.为了调查某厂2 000名工人生产某种产品的能力，随机抽查了20位工人某天生产该产品的数量，产品数量的分组区间为[10,15)，[15,20)，[20,25)，[25,30)，[30,35]，频率分布直方图如图所示.工厂规定从生产低于20件产品的工人中随机地选取2位工人进行培训，则这2位工人不在同一组的概率是(　　)



A. B. C. D.

答案　C

解析　根据频率分布直方图，可知产品件数在[10,15)，[15,20)内的人数分别为5×0.02×20＝2,5×0.04×20＝4.设生产产品件数在[10,15)内的2人分别是*A*，*B*，生产产品件数在[15,20)内的4人分别为*C*，*D*，*E*，*F*，则从生产低于20件产品的工人中随机地选取2位工人的结果有(*A*，*B*)，(*A*，*C*)，(*A*，*D*)，(*A*，*E*)，(*A*，*F*)，(*B*，*C*)，(*B*，*D*)，(*B*，*E*)，(*B*，*F*)，(*C*，*D*)，(*C*，*E*)，(*C*，*F*)，(*D*，*E*)，(*D*，*F*)，(*E*，*F*)，共15种.2位工人不在同一组的结果有(*A*，*C*)，(*A*，*D*)，(*A*，*E*)，(*A*，*F*)，(*B*，*C*)，(*B*，*D*)，(*B*，*E*)，(*B*，*F*)，共8种.故选取的2位工人不在同一组的概率为.

4．从集合{1,2,3，…，11}中任意取两个元素作为椭圆＋＝1方程中的*m*和*n*，则能组成落在矩形区域*B*＝{(*x*，*y*)||*x*|<11，|*y*|<9}内的椭圆的个数是(　　)

A．43 B．72

C．86 D．90

答案　B

解析　根据题意，*m*是不大于10的正整数，*n*是不大于8的正整数．但是当*m*＝*n*时，＋＝1是圆而不是椭圆．先确定*n*，*n*有8种可能，对每一个确定的*n*，*m*有10－1＝9种可能．故满足条件的椭圆有8×9＝72(个)．

5．分配4名水暖工去3户不同的居民家里检查暖气管道．要求4名水暖工都分配出去，且每户居民家都要有人去检查，那么分配的方案共有(　　)

A．A种 B．AA种

C．CA种 D．CCA种

答案　C

解析　先将4名水暖工选出2人分成一组，然后将三组水暖工分配到3户不同的居民家，故有CA种．

6．计划展出10幅不同的画，其中1幅水彩画、4幅油画、5幅国画，排成一列，要求同一品种的画必须连在一起，并且水彩画不放在两端，那么不同的排列方式的种数为(　　)

A．AA B．AAA

C．CAA D．AAA

答案　D

解析　先把每个品种的画看成一个整体，而水彩画只能放在中间，则油画与国画放在两端有A种放法，再考虑4幅油画本身排放有A种方法，5幅国画本身排放有A种方法，故不同的陈列法有AAA种．

7．圆周上有8个等分圆周的点，以这些等分点为顶点的锐角三角形或钝角三角形的个数是(　　)

A．16 B．24 C．32 D．48

答案　C

解析　圆周上8个等分点共可构成4条直径，而直径所对的圆周角是直角，又每条直径对应着6个直角三角形，共有CC＝24(个)直角三角形，锐角三角形或钝角三角形的个数为C－CC＝32(个)．

8．将18个参加青少年科技创新大赛的名额分配给3所学校，要求每所学校至少有1个名额且各校分配的名额互不相等，则不同的分配方法种数为(　　)

A．96 B．114 C．128 D．136

答案　B

解析　先用隔板法把18个元素形成的除两边以外的17个空中放上2个隔板有C＝136种方法，再减去名额相等的情况(1,1,16)，(2,2,14)，(3,3,12)，(4,4,10)，(5,5,8)，(6,6,6)，(7,7,4)，(8,8,2)，共有7C＋1＝22种方法，

∴不同的分配方法种数为136－22＝114

9．已知函数*f*(*x*)＝*x*2＋cos *x*，*f*′(*x*)是函数*f*(*x*)的导函数，则*f*′(*x*)的图象大致是(　　)



答案　A

解析　由于*f*(*x*)＝*x*2＋cos *x*，

∴*f*′(*x*)＝*x*－sin *x*，∴*f*′(－*x*)＝－*f*′(*x*)，

故*f*′(*x*)为奇函数，其图象关于原点对称，排除B和D，又当*x*＝时，*f*′＝－sin ＝－1<0，排除C，故选A.

10．已知*f*(*x*)＝*ax*3＋*bx*2＋*x*(*a*，*b*∈**R**且*ab*≠0)的图象如图所示，若|*x*1|>|*x*2|，则有(　　)



A．*a*>0，*b*>0

B．*a*<0，*b*<0

C．*a*<0，*b*>0

D．*a*>0，*b*<0

答案　B

解析　由*f*(*x*)的图象易知*f*(*x*)有两个极值点*x*1，*x*2，且*x*＝*x*1时有极小值，∴*f*′(*x*)＝3*ax*2＋2*bx*＋1的图象如图所示，



∴*a*<0.

又|*x*1|>|*x*2|，∴－*x*1>*x*2，

∴*x*1＋*x*2<0，即*x*1＋*x*2＝－<0，

∴*b*<0.

**11．给出下列四个结论：**

**①命题“∃*x*∈R，*x*2－*x*>0”的否定是“∀*x*∈R，*x*2－*x*≤0”；**

**②“若*am*2<*bm*2，则*a*<*b*”的逆命题为真；**

**③函数*f*(*x*)＝*x*－sin*x*(*x*∈R)有3个零点；**

**④对于任意实数*x*，有*f*(－*x*)＝－*f*(*x*)，*g*(－*x*)＝*g*(*x*)，且*x*>0时，*f*′(*x*)>0，*g*′(*x*)>0，则*x*<0时*f*′(*x*)>*g*′(*x*)．**

**其中正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_\_\_．**

**A① B② C③ D④**

**解析：显然①正确；而②的逆命题为“若*a*<*b*，则*am*2<*bm*2”，当*m*2＝0时不成立，故②不正确；**

**③中*f*′(*x*)＝1－cos*x*≥0，**

**∴*f*(*x*)在R上为单调增函数．**

**∴在R上有且仅有一个零点，故③不正确；**

**对于④由已知*f*(*x*)为奇函数，又在(0，＋∞)时*f*′(*x*)>0，**

**∴*f*(*x*)在(0，＋∞)上为增函数．∴在*x*<0时亦为增函数，∴*f*′(*x*)>0，同理*g*(*x*)在(－∞，0)上为减函数，∴*x*<0时*g*′(*x*)<0，因此*f*′(*x*)>*g*′(*x*)，故④正确．**

**答案：AD**

**12．已知两点*A*(1，－2)，*B*(－4，－2)及下列四条曲线：**

**①4*x*＋2*y*＝3　②*x*2＋*y*2＝3　③*x*2＋2*y*2＝3 ④*x*2－2*y*2＝3**

**其中存在点*P*，使|*PA*|＝|*PB*|的曲线有(　　)**

**A．① B．②**

**C．③ D．④**

**解析：易知线段*AB*的垂直平分线*l*的方程为*x*＝－，画图知与直线*l*有公共点的曲线有①②③.**

**答案：ABC**

二、填空题（共4题）

13.将参加数学竞赛的1 000名学生编号如下：

0001,0002，…，1000，打算从中抽取一个容量为50的样本，按系统抽样的方法分成50个部分，从第一部分随机抽取一个号码为0015，则第40个号码为\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　0795

解析　根据系统抽样方法的定义，得第40个号码对应15＋39×20＝795，即得第40个号码为0795.

14.如图所示，分别以*A*，*B*，*C*为圆心，在△*ABC*内作半径为2的扇形(图中的阴影部分)，在△*ABC*内任取一点*P*，如果点*P*落在阴影内的概率为，那么△*ABC*的面积是\_\_\_\_\_\_\_\_.



答案　6π

解析　由题意可知，阴影部分的扇形面积为一个以2为半径的半圆的面积，所以＝，所以*S*△*ABC*＝6π.

15．若直线*y*＝*kx*＋*b*是曲线*y*＝ln *x*＋2的切线，也是曲线*y*＝ln(*x*＋1)的切线，则*b*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　1－ln 2

解析　*y*＝ln *x*＋2的切线为：*y*＝·*x*＋ln *x*1＋1(设切点横坐标为*x*1)．

*y*＝ln(*x*＋1)的切线为：*y*＝*x*＋ln(*x*2＋1)－(设切点横坐标为*x*2)，

∴

解得*x*1＝，*x*2＝－，∴*b*＝ln *x*1＋1＝1－ln 2

16．(2018·黄冈高二月考)已知*F*是双曲线－＝1(*a*>0，*b*>0)的左焦点，*E*是双曲线的右顶点，过点*F*且垂直于*x*轴的直线与双曲线交于*A*，*B*两点，若△*ABE*是锐角三角形，则该双曲线的离心率*e*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(1,2)

解析　∵△*ABE*为等腰三角形，可知只需∠*AEF*<45°即可，即|*AF*|<|*EF*|⇒<*a*＋*c*，化简得*e*2－*e*－2<0，又*e*>1，∴1<*e*<2，∴该双曲线的离心率*e*的取值范围为(1,2)．

三、解答题（共6题）

17．已知*A*＝{*x*|1<log2*x*<3，*x*∈**N**\*}，*B*＝{*x*||*x*－6|<3，*x*∈**N**\*}．试问：

(1)从集合*A*和*B*中各取一个元素作直角坐标系中点的坐标，共可得到多少个不同的点？

(2)从*A*∪*B*中取出三个不同的元素组成三位数，从左到右的数字要逐渐增大，这样的三位数有多少个？

解　*A*＝{3,4,5,6,7}，*B*＝{4,5,6,7,8}．

(1)从*A*中取一个数作为横坐标，从*B*中取一个数作为纵坐标，有5×5＝25(个)，而8作为横坐标的情况有5种，3作为纵坐标的情况有4种，故共有5×5＋5＋4＝34(个)不同的点．

(2)*A*∪*B*＝{3,4,5,6,7,8}，则这样的三位数共有C＝20(个)．

18．如图所示，在四棱锥*P*－*ABCD*中，底面*ABCD*是矩形，*PA*⊥平面*ABCD*，*PA*＝*AD*＝2，*AB*＝1，*BM*⊥*PD*于点*M*.



(1)求证：*AM*⊥*PD*；

(2)求直线*CD*与平面*ACM*所成角的余弦值．

 (1)证明　∵*PA*⊥平面*ABCD*，*AB*⊂平面*ABCD*，

∴*PA*⊥*AB*.

∵*AB*⊥*AD*，*AD*∩*PA*＝*A*，∴*AB*⊥平面*PAD*，

∵*PD*⊂平面*PAD*，∴*AB*⊥*PD*.

∵*BM*⊥*PD*，*AB*∩*BM*＝*B*，∴*PD*⊥平面*ABM*.

∵*AM*⊂平面*ABM*，∴*AM*⊥*PD*.

(2)解　如图所示，以点*A*为坐标原点，建立空间直角坐标系*Axyz*，则*A*(0,0,0)，*P*(0,0,2)，*B*(1,0,0)，*C*(1,2,0)，*D*(0,2,0)，*M*(0,1,1)，



于是＝(1,2,0)，＝(0,1,1)，＝(－1,0,0)．

设平面*ACM*的一个法向量为***n***＝(*x*，*y*，*z*)，

由***n***⊥，***n***⊥可得

令*z*＝1，得*x*＝2，*y*＝－1，于是***n***＝(2，－1,1)．

设直线*CD*与平面*ACM*所成的角为*α*，

则sin *α*＝＝，cos *α*＝.

故直线*CD*与平面*ACM*所成角的余弦值为.

19．如图所示，在四棱锥*E*－*ABCD*中，四边形*ABCD*是平行四边形，△*BCE*是等边三角形，△*ABE*是等腰直角三角形，∠*BAE*＝90°，且*AC*＝*BC*.



(1)证明：平面*ABE*⊥平面*BCE*；

(2)求二面角*A*－*DE*－*C*的余弦值．

 (1)证明　设*O*为*BE*的中点，连接*AO*，*CO*，易知*AO*⊥*BE*，*CO*⊥*BE*.设*AC*＝*BC*＝2，则*AO*＝1，*CO*＝，可得*AO*2＋*CO*2＝*AC*2，所以*AO*⊥*CO*.又*AO*∩*BE*＝*O*，所以*CO*⊥平面*ABE*.又*CO*⊂平面*BCE*，故平面*ABE*⊥平面*BCE*.



(2)解　由(1)可知*AO*，*BE*，*CO*两两垂直，设*OE*＝1，以*O*为坐标原点，*OE*，*OC*，*OA*分别为*x*，*y*，*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系*Oxyz*，则*A*(0,0,1)，*E*(1,0,0)，*C*(0，，0)，易得*D*(1，，1)．故＝(1，，0)，＝(1,0，－1)，＝(－1，，0)，＝(1,0,1)，设***n***＝(*x*1，*y*1，*z*1)是平面*ADE*的法向量，则

即令*y*1＝1，可得***n***＝(－，1，－)．

设***m***＝(*x*2，*y*2，*z*2)是平面*DEC*的法向量，

则即

令*y*2＝1，可得***m***＝(，1，－)，则cos〈***n***，***m***〉＝＝，易知二面角*A*－*DE*－*C*为锐角，所以二面角*A*－*DE*－*C*的余弦值为.

20．已知过抛物线*y*2＝2*px*(*p*>0)的焦点，斜率为2的直线交抛物线于*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)(*x*1<*x*2)两点，且|*AB*|＝9.

(1)求该抛物线的方程；

(2)*O*为坐标原点，*C*为抛物线上一点，若＝＋*λ*，求*λ*的值．

解　(1)直线*AB*的方程是*y*＝2，

与*y*2＝2*px*联立，从而有4*x*2－5*px*＋*p*2＝0，

所以*x*1＋*x*2＝.

由抛物线定义得|*AB*|＝*x*1＋*x*2＋*p*＝＋*p*＝9，

所以*p*＝4，从而抛物线方程是*y*2＝8*x*.

(2)由于*p*＝4，则4*x*2－5*px*＋*p*2＝0，即*x*2－5*x*＋4＝0，

从而*x*1＝1，*x*2＝4，于是*y*1＝－2，*y*2＝4，

从而*A*(1，－2)，*B*(4,4)，设*C*(*x*3，*y*3)，则＝(*x*3，*y*3)＝(1，－2)＋*λ*(4,4)＝(4*λ*＋1,4*λ*－2)，

又*y*＝8*x*3，即[2(2*λ*－1)]2＝8(4*λ*＋1)，即(2*λ*－1)2＝4*λ*＋1，解得*λ*＝0或*λ*＝2.

21．已知椭圆*C*的中心在原点，焦点在*x*轴上，离心率为，它的一个顶点恰好是抛物线*x*2＝4*y*的焦点．



(1)求椭圆*C*的方程；

(2)直线*x*＝2与椭圆交于*P*，*Q*两点，*P*点位于第一象限，*A*，*B*是椭圆上位于直线*x*＝2两侧的动点．

①若直线*AB*的斜率为，求四边形*APBQ*面积的范围；

②当点*A*，*B*运动时，满足∠*APQ*＝∠*BPQ*，问直线*AB*的斜率是否为定值，请说明理由．

解　(1)设椭圆*C*的方程为＋＝1(*a*>*b*>0)，

由题意可得它的一个顶点恰好是抛物线*x*2＝4*y*的焦点(0，)，∴*b*＝，

再根据离心率＝＝＝.

求得*a*＝2.

∴椭圆*C*的方程为＋＝1.

(2)①设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，*AB*的方程为*y*＝*x*＋*t*，

代入椭圆*C*的方程化简可得，

*x*2＋2*tx*＋2*t*2－4＝0，

由*Δ*＝4*t*2－4(2*t*2－4)>0，解得－2<*t*<2.

因为*A*，*B*位于直线*x*＝2的两侧，

则当*x*＝2时，*x*2＋2*tx*＋2*t*2－4<0，

即4＋4*t*＋2*t*2－4<0，解得－2<*t*<0，

利用根与系数的关系可得，

*x*1＋*x*2＝－2*t*，*x*1*x*2＝2*t*2－4.

在＋＝1中，令*x*＝2求得，

*P*(2,1)，*Q*(2，－1)，

∴四边形*APBQ*的面积

*S*＝*S*△*APQ*＋*S*△*BPQ*＝|*PQ*||*x*1－*x*2|

＝×2×|*x*1－*x*2|

＝|*x*1－*x*2|＝

＝＝，

故四边形*APBQ*的面积*S*的范围是(0,4)．

②当∠*APQ*＝∠*BPQ*时，

*PA*，*PB*的斜率之和等于0，且斜率均存在．

设*PA*的斜率为*k*，则*PB*的斜率为－*k*，

*PA*的方程为*y*－1＝*k*(*x*－2)，

把它代入椭圆方程化简可得(1＋4*k*2)*x*2＋8*k*(1－2*k*)*x*＋4(1－2*k*)2－8＝0.

∴*x*1＋2＝.

同理可得，直线*PB*的方程为

*y*－1＝－*k*(*x*－2)，*x*2＋2＝.

∴*x*1＋*x*2＝，*x*1－*x*2＝－.

∴*AB*的斜率为

*k*＝＝

＝＝

＝＝.

∴*AB*的斜率为定值，为.

22．(12分)已知*f*(*x*)＝*a*ln(*x*－1)，*g*(*x*)＝*x*2＋*bx*，*F*(*x*)＝*f*(*x*＋1)－*g*(*x*)，其中*a*，*b*∈**R**.

(1)若*y*＝*f*(*x*)与*y*＝*g*(*x*)的图象在交点(2，*k*)处的切线互相垂直，求*a*，*b*的值；

(2)若*x*＝2是函数*F*(*x*)的一个极值点，*x*0和1是*F*(*x*)的两个零点，且*x*0∈(*n*，*n*＋1)，*n*∈**N**，求*n*；

(3)当*b*＝*a*－2时，若*x*1，*x*2是*F*(*x*)的两个极值点，当|*x*1－*x*2|>1时，求证：|*F*(*x*1)－*F*(*x*2)|>3－4ln 2.

(1)解　*f*′(*x*)＝，*g*′(*x*)＝2*x*＋*b*，

由题意知即

解得

(2)解　*F*(*x*)＝*f*(*x*＋1)－*g*(*x*)＝*a*ln *x*－(*x*2＋*bx*)，

*F*′(*x*)＝－2*x*－*b*.

由题知即解得*a*＝6，*b*＝－1，

∴*F*(*x*)＝6ln *x*－(*x*2－*x*)，

*F*′(*x*)＝－2*x*＋1＝.

∵*x*>0，

由*F*′(*x*)>0，解得0<*x*<2；

由*F*′(*x*)<0，解得*x*>2，

∴*F*(*x*)在(0,2)上单调递增，在(2，＋∞)上单调递减，

故*F*(*x*)至多有两个零点，

其中*x*1∈(0,2)，*x*2∈(2，＋∞)，

又*F*(2)>*F*(1)＝0，*F*(3)＝6(ln 3－1)>0，

*F*(4)＝6(ln 4－2)<0，

∴*x*0∈(3,4)，故*n*＝3；

(3)证明　当*b*＝*a*－2时，*F*(*x*)＝*a*ln *x*－[*x*2＋(*a*－2)*x*]，

*F*′(*x*)＝－2*x*－(*a*－2)＝，

由题意知*F*′(*x*)＝0在(0，＋∞)上有两个不同根*x*1，*x*2，

则*a*<0且*a*≠－2，

此时*F*′(*x*)＝0的两根为－，1，

由题意知>1，则＋*a*＋1>1，*a*2＋4*a*>0.

又∵*a*<0，∴*a*<－4，此时－>2.

则*F*(*x*)与*F*′(*x*)随*x*的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (0,1) | 1 |  | － |  |
| *F*′(*x*) | － | 0 | ＋ | 0 | － |
| *F*(*x*) | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

∴|*F*(*x*1)－*F*(*x*2)|＝*F*(*x*)极大值－*F*(*x*)极小值

＝*F*－*F*(1)

＝*a*ln＋*a*2－1，

设*φ*(*a*)＝*a*ln＋*a*2－1，

则*φ*′(*a*)＝ln＋*a*＋1，

设*h*(*a*)＝ln＋＋1，

则*h*′(*a*)＝＋，∵*a*<－4，∴>－，

∴*h*′(*a*)＝＋>0，

∴*h*(*a*)在(－∞，－4)上是增函数，

*h*(*a*)<*h*(－4)＝ln 2－1<0，

∴*φ*′(*a*)<0在(－∞，－4)上恒成立，

从而*φ*(*a*)在(－∞，－4)上是减函数，

∴*φ*(*a*)>*φ*(－4)＝3－4ln 2，

∴|*F*(*x*1)－*F*(*x*2)|>3－4ln 2.