微专题 圆锥曲线中两根不对称的问题处理

一般圆锥曲线所求解的式子都含有“两根之和”、“两根之积”，这种式子是含两根的对称式，求解时只需联立直线方程和曲线方程，消元得一元二次方程，再由韦达定理代入化简求解即可。但有些式子还含有“两根之和”、“两根之积”以外的，这种就是非对称式的，如。如何来处理这样的问题，我们接下来通过下面一道例题来学习。

【**例**】已知分别为椭圆的左、右顶点，,若椭圆的内接四边形满足三点共线（在轴上方），记直线的斜率分别为，判断是否为定值并证明。

解:设直线的方程为，

联立，消去，得，并设

则，，因为，所以



法一:当时，



下证： 即证： 即证：

即证：

因为，所以成立，所以为定值。

法二：，因为， ，所以



又因为，

法三：

因为，，两式相除得，代入中可得，

法四：



法五：设直线的斜率为，因为

所以，

而



注：本题若设直线方程为，则，那化简就繁琐多了。

【**解后反思**】

数学思想方法的应用：

1. 先猜后证，体现了从特殊到一般的数学思想的应用。
2. 把不对称问题转化到对称问题，体现了化归与转化的数学思想的应用。

【**练**】已知椭圆焦距为，过点。

1. 求椭圆的标准方程；
2. 设椭圆的右焦点为，定点，过点且斜率不为零的直线与椭圆交于两点，以线段为直径的圆与直线的另一个交点为，证明：直线恒过一定点，并求出该定点的坐标。

解：（1）由题意知，解得，所以椭圆的方程为

1. 因为直线的斜率不为零，所以设的方程为：，由得，设，则因为以为直径的圆与直线的另一个交点为，所以，则，，故的方程为：，由椭圆的对称性知，定点必在轴上，所以令，则

而，

法一：由于，所以

故直线恒过定点，且定点为。

法二：

故直线恒过定点，且定点为。