**泉州七中2020级高一下学期数学限时训练（2）**2021-3-12

组卷人：梁木华

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| **答案** | **B** | **C** | **D** | **B** | **C** | **A** | **A** | **A** | **ABD** | **AD** | **CD** | **ACD** |

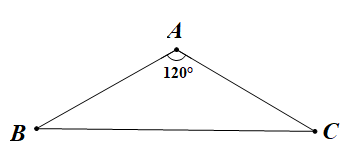
一、选择题（本大题共**8**小题，共**40**分）

1. 下列结论中正确的为

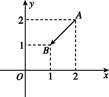
A. 两个有共同起点的单位向量，其终点必相同 B. 向量与向量的长度相等  
C. 对任意向量，是一个单位向量 D. 零向量没有方向

【答案】*B* 【解答】解：*A*选项，单位向量的方向任意，所以当起点相同时，终点在以起点为圆心的单位圆上，终点不一定相同，故*A*不正确  
*B*选项，向量与向量是相反向量，方向相反，长度相等，故*B*正确  
*C*选项，当时，无意义，故*C*不正确  
*D*选项，零向量的方向是任意的，而不是没有方向，故*D*不正确．  
故选*B*．

1. 如图所示，是顶角为 的等腰三角形，且，则



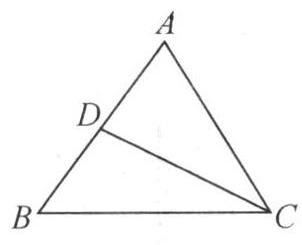
A. B. C. D.

【答案】*C* 解：是顶角为 的等腰三角形，且，则，  
则，，  
则． 选*C*．

1. 在如图所示的平面直角坐标系中，向量的坐标是

A. B. C. D.

【答案】*D* 解：因为，，所以，故选*D*．

1. 如图所示，已知在中，*D*是边*AB*上的中点，则   

A. B.   
C. D.

【答案】*B*

解：方法一：是*AB*的中点，  
，  
．

方法二：．  
故选*B*．

1. 已知在中，，*P*是*BN*上的一点若，则实数*m*的值为

A. B. C. D.

【答案】*C*

解：设，  
则，解得 故选*C*．

1. 已知是边长为2的正六边形内的一点，则的取值范围是　　

A． B． C． D．

【思路分析】画出图形，结合向量的数量积转化判断求解即可．

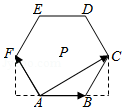
【解析】：画出图形如图，

，它的几何意义是的长度与在向量的投影的乘积，显然，在处时，取得最大值，，可得，最大值为6，

在处取得最小值，，最小值为，

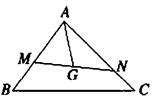
是边长为2的正六边形内的一点，

所以的取值范围是．故选：．



【总结与归纳】本题考查向量的数量积的应用，向量在几何中的应用，是中档题．

1. 如图所示，已知点*G*是的重心，过点*G*作直线分别与*AB*，*AC*两边交于*M*，*N*两点点*N*与点*C*不重合，设，，则的最小值为



A. 2 B. C. D.

【答案】*A*

【分析】难度适中解：为的重心，  
，且，  
又在线段*MN*上，，，  
，  
，  
当且仅当，即时等号成立． 故选*A*．

1. 已知，是平面内两个不共线的向量，，，，若三点共线，则*k*的值为

A. 2 B. C. D. 3

【答案】*A* 解：，，，  
，  
，  
、*B*、*D*三点共线，  
与共线，  
存在唯一的实数，使得；  
即，  
所以解得． 故选*A*．

二、不定项选择题（本大题共**4**小题，共**20**分）

1. 下列说法错误的是

A. 若=，则 .

B. 若，则存在唯一实数使得  
C. 两个非零向量，，若，则与共线且反向  
D. 已知，，且与的夹角为锐角，则实数的取值范围是(− \dfrac{5}{3},+{\rm ∞})

【答案】*ABD*

解：对于*A*：若为零向量，则错误；  
对于*B*：若，则  ，如果，则实数不唯一，故错误；  
对于*C*：两个非零向量，，若，可得，  
即，，  
则两个向量的夹角为，则与共线且反向，故正确；  
对于*D*：已知，，且与的夹角为锐角，  
可得，即，  
可得，解得，  
当与的夹角为0时，，  
所以，  
所以与的夹角为锐角时且，故错误；故说法错误的是*ABD*．  
故选*ABD*．



1. 设是三个非零向量，则正确的有



A. 若，，则；  
B. 若，则可构成三角形；  
C.   
D.



【答案】*AD*

解：对于*A*，因为不是零向量，所以，故正确；  
对于*B*，可能共线，方向不一样；故错；  
对于*C*，如果，则，故错；  
对于*D*，向量满足分配律  
即  
故正确．  
故选*AD*

**11.** 已知***a***＝(cos *α*，sin *α*)，***b***＝(cos *β*，sin *β*)，*α*，*β*∈(0，π)，且***a***⊥***b***，则下列结论正确的是(　　)

A．*α*＝*β* B．*α*＝*β*＋ C．(***a***＋***b***)⊥(***a***－***b***) D．|***a***＋***b***|＝|***a***－***b***|

答案　CD

解析　∵***a***⊥***b***，∴***a***·***b***＝cos *α*cos *β*＋sin *α*sin*β*＝0，

即cos(*α*－*β*)＝0，

∵*α*，*β*∈(0, π)，∴*α*－*β*＝±，故A，B错误．

又(***a***＋***b***)·(***a***－***b***)＝|***a***|2－|***b***|2＝1－1＝0，

∴(***a***＋***b***)⊥(***a***－***b***)，故C正确．

(***a***＋***b***)2＝***a***2＋2***a***·***b***＋***b***2＝***a***2＋***b***2＝2，

(***a***－***b***)2＝***a***2－2***a***·***b***＋***b***2＝***a***2＋***b***2＝2，故D正确．

**12．**定义平面向量之间的一种运算“⊙”如下：对任意的***a***＝(*m*，*n*)，***b***＝(*p*，*q*)，令***a***⊙***b***＝*mq*－*np*，下面说法正确的是(　　)

A．若***a***与***b***共线，则***a***⊙***b***＝0 B．***a***⊙***b***＝***b***⊙***a***

C．对任意的*λ*∈**R**，有(*λ****a***)⊙***b***＝*λ*(***a***⊙***b***) D．(***a***⊙***b***)2＋(***a***·***b***)2＝|***a***|2|***b***|2

答案　ACD

解析　对于A，若***a***与***b***共线，则有*mq*－*np*＝0，

又***a***⊙***b***＝*mq*－*np*，所以***a***⊙***b***＝0，故A正确；

对于B，因为***a***⊙***b***＝*mq*－*np*，而***b***⊙***a***＝*pn*－*qm*，

所以有***a***⊙***b***≠***b***⊙***a***，故B错误；

对于C，(*λ****a***)⊙***b***＝*λqm*－*λpn*，

而*λ*(***a***⊙***b***)＝*λ*(*qm*－*pn*)＝*λqm*－*λpn*，故C正确；

对于D，(***a***⊙***b***)2＋(***a***·***b***)2＝(*qm*－*pn*)2＋(*mp*＋*nq*)2＝(*m*2＋*n*2)(*p*2＋*q*2)＝|***a***|2|***b***|2，D正确．

故选ACD.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| **答案** | **B** | **C** | **D** | **B** | **C** | **A** | **A** | **A** | **ABD** | **AD** | **CD** | **ACD** |

1. 填空题（本大题共**4**小题，共**20**分）

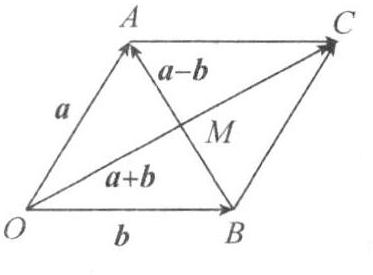
13. 已知非零向量，满足，则          ．

【答案】

【解析】

【分析】本题考查向量的概念及几何表示，向量的模，向量的线性运算，属于基础题．  
设，，则，，由，得为正三角形，设其边长为1，计算可得．  
【解答】  
解：如图，设，，

则，．



，  
．

为正三角形，设其边长为1， 则，．

．

1. 已知，均为非零向量，，，则，的夹角为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】



【解答】  
解：由题意得，因为，，  
所以，，  
即，，  
所以，



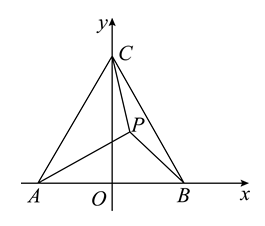
又， 所以．故答案为．



1. 等边三角形*ABC*中，若，则当取得最小值时，\_\_\_\_\_\_\_

【答案】

【解答】解：以*AB*所在的直线为*x*轴，以*AB*的垂直平行线为*y*轴，建立如图所示的直角坐标系，



设等边三角形的边长为2，则，，*C*，，

设，

，

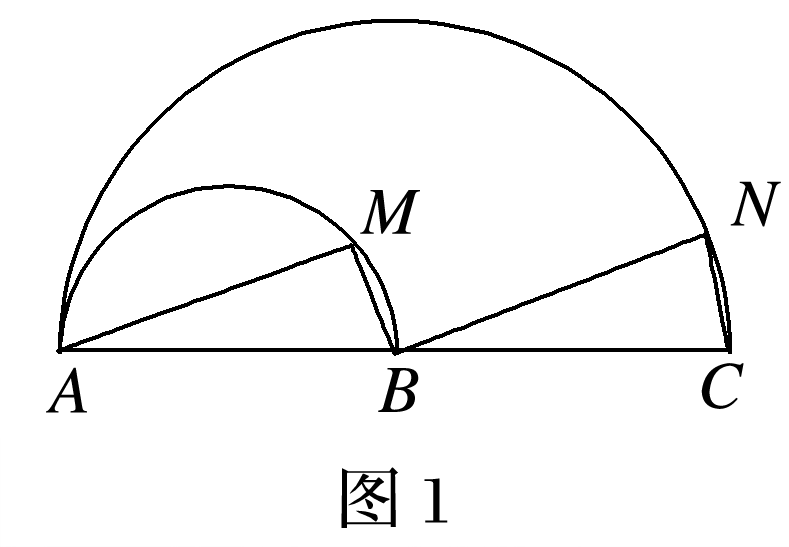
，

，，

当 时，有最小值， 故答案为．

在平面向量的问题中，存在一种“以平面图形为载体的有关数量积的最大值问题”，通过对该类问题的多解探究，进一步提高分析、解决此类问题的能力．

1. 如图1，已知*AC*＝2，*B*为*AC*的中点，分别以*AB*，*AC*为直径在*AC*同侧作半圆，*M*，*N*分别为两半圆上的动点(不含端点*A*，*B*，*C*)，且*BM*⊥*BN*，则·的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

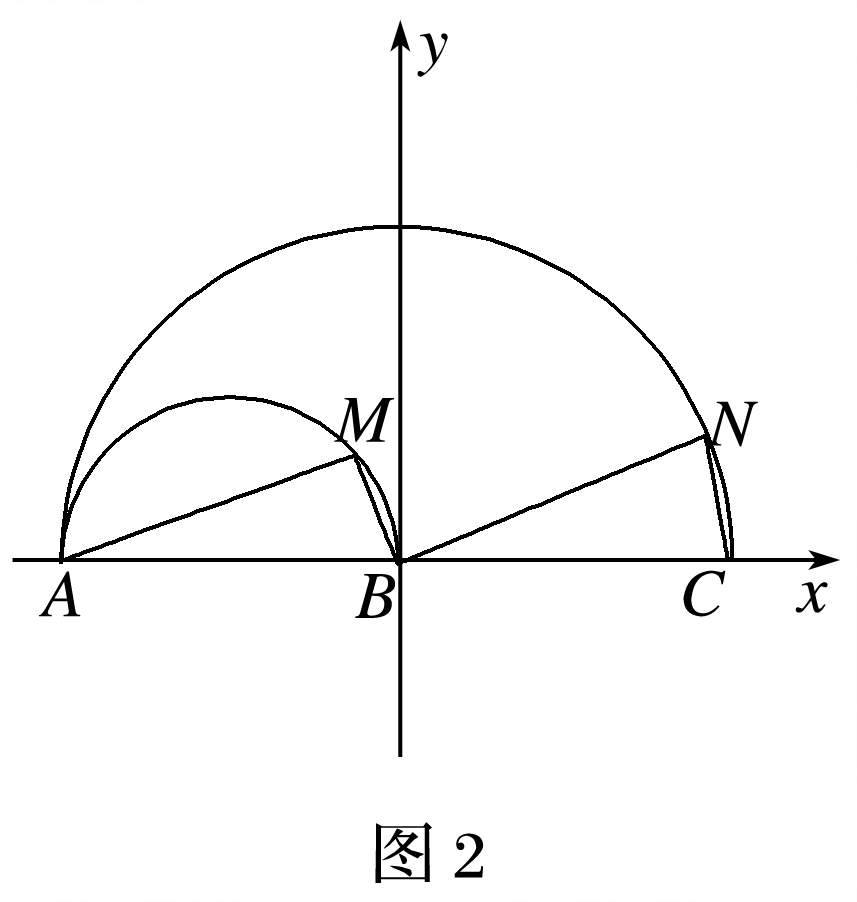


答案

解析　方法一　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1.

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，若设∠*MAB*＝*θ*，则∠*NBC*＝*θ*.

如图2，建立平面直角坐标系*xBy*，则点*A*(－1,0)，*M*(－sin2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，*C*(1,0)，*N*(cos *θ*，sin *θ*)，



所以＝(－sin2*θ*＋1，sin *θ*cos *θ*)＝(cos2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，＝(cos *θ*－1，sin *θ*)．

于是，·＝cos2*θ*·(cos *θ*－1)＋sin2*θ*cos *θ*

＝cos3*θ*－cos2*θ*＋(1－cos2*θ*)·cos *θ*

＝－cos2*θ*＋cos *θ*＝－2.

又易知0<*θ*<，所以，当*θ*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的切入点是引入辅助角*θ*，准确写出点*M*，*N*的坐标，以便灵活利用平面向量的坐标运算加以求解．

方法二　如方法一中图2，建立平面直角坐标系*xBy*，设直线*BN*的方程为*y*＝*kx*(*k*>0)，则因为*BM*⊥*BN*，所以直线*BM*的方程为*y*＝－*x*.

注意到点*N*是直线*BN*与以*AC*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝*kx*与*x*2＋*y*2＝1联立，可求得点*N*的坐标为.

注意到点*M*是直线*BM*与以*AB*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝－*x*与2＋*y*2＝联立，可求得点*M*的坐标为.

又*A*(－1,0)，*C*(1,0)，

所以向量＝，＝，

所以·＝＋·

＝＝－＝－2，

故当＝，即*k*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是引入参数*k*(直线*BN*的斜率)，并借助直线和圆的方程，灵活求解点*M*，*N*的坐标，整个求解过程显然比方法一增加了许多运算量．

方法三　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1，

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，

所以·＝||×1×cos 0°＝||.

因为*AM*⊥*BM*，*AB*＝1，

所以||＝1×cos∠*MAB*＝cos∠*MAB*，

所以·＝·

＝||×1×cos∠*MAB*＝||2.

于是，·＝·(－)

＝·－·

＝||－||2＝－2.

又0<||<1，

所以，当||＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是充分利用平面向量的数量积公式***a***·***b***＝|***a***|·|***b***|cos *θ*，将目标问题等价转化为求解关于“||”的二次函数在区间(0,1)上的最大值．

方法四　如图3，分别延长*AM*，*CN*，设其交点为*E*，并设*ME*与大半圆的交点为*D*，连接*CD*，则易知*AM*⊥*MB*，*AD*⊥*DC*，所以*BM*∥*CD*，又*B*为*AC*的中点，

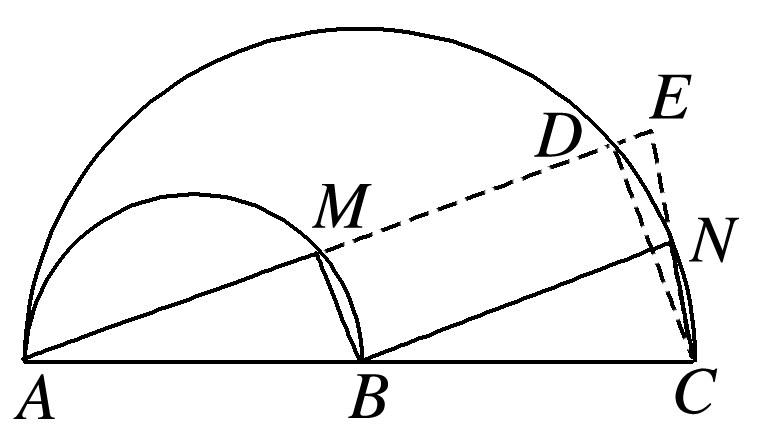


图3

所以*M*为*AD*的中点，

所以＝.

又易知∥，且*B*为*AC*的中点，所以*N*为*CE*的中点，所以＝.

于是，·＝·

＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°

＝||·||.

因为*BN*为△*ACE*的中位线，

所以||＋||＝||＝2||＝2.

从而，·＝||·||

≤2＝×2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*AE*的中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作辅助线，充分利用相关平面几何知识，先获得＝和＝，然后再综合利用向量的几何意义、数量积运算、三角形中位线性质定理以及基本不等式的变形式“*ab*≤2”加以灵活求解．

方法五　如图4，以*BC*为直径画半圆，交*BN*于点*D*，连接*CD*，则*BD*⊥*CD*.又易知*AM*∥*BD*，且*AM*＝*BD*，

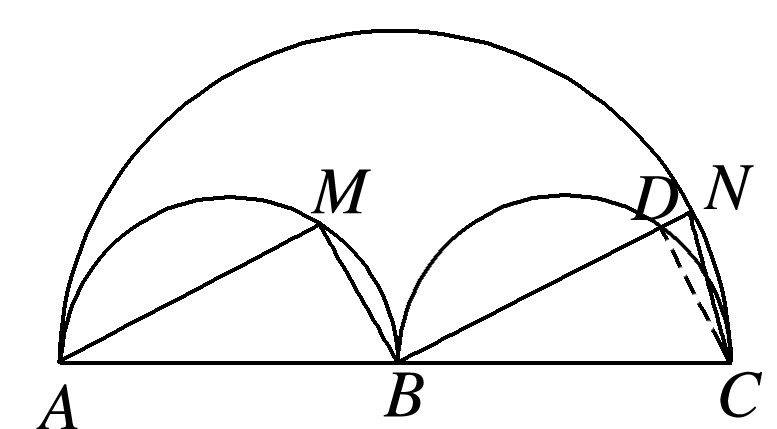


图4

所以·＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°＝||·||

≤2＝2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*BN*中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作“半圆”，先将目标问题等价转化为求||·||的最大值，再灵活利用基本不等式的变形巧求最大值．显然，该解法最简单，故值得我们细细品味、深思！

综上，不同的思维切入点，往往可获得不同的解题体验，真可谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，需要我们在学中“悟”，在“悟”中不断提升解题技巧．

17. （解答题**20**分）17.已知向量***m***＝(2cos *ωx*，－1)，***n***＝(sin *ωx*－cos *ωx*,2)，其中*ω*>0，函数*f* (*x*)＝***m***·***n***＋3，若函数*f* (*x*)图象的两个相邻对称中心的距离为.

(1)求函数*f* (*x*)的单调递增区间；

(2)将函数*f* (*x*)的图象先向左平移个单位长度，然后纵坐标不变，横坐标缩短为原来的，得到函数*g*(*x*)的图象，当*x*∈时，求函数*g*(*x*)的值域．

解　(1)由题意可得*f* (*x*)＝***m***·***n***＋3

＝2cos *ωx*(sin *ωx*－cos *ωx*)－2＋3

＝2sin *ωx*cos *ωx*－(2cos2*ωx*－1)

＝sin 2*ωx*－cos 2*ωx*

＝sin.

由题意知，*T*＝＝π，得*ω*＝1，

则*f* (*x*)＝sin.

由2*k*π－≤2*x*－≤2*k*π＋，*k*∈**Z**，

解得*k*π－≤*x*≤*k*π＋，*k*∈**Z**，

∴*f* (*x*)的单调递增区间为，*k*∈**Z**.

(2)将*f* (*x*)的图象向左平移个单位长度，得到*y*＝sin的图象，

纵坐标不变，横坐标缩短为原来的，

得到*g*(*x*)＝sin的图象．

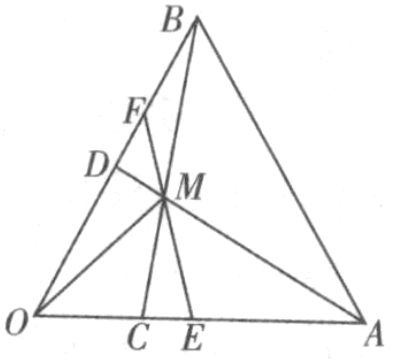
∵*x*∈，∴4*x*＋∈，

∴－1≤sin≤，

故函数*g*(*x*)的值域为[－，1]

备用：

1. 如图，在中，*D*是边*OB*的中点，*C*是边*OA*上靠近点*O*的一个三等分点，*AD*与*BC*交于点设，．



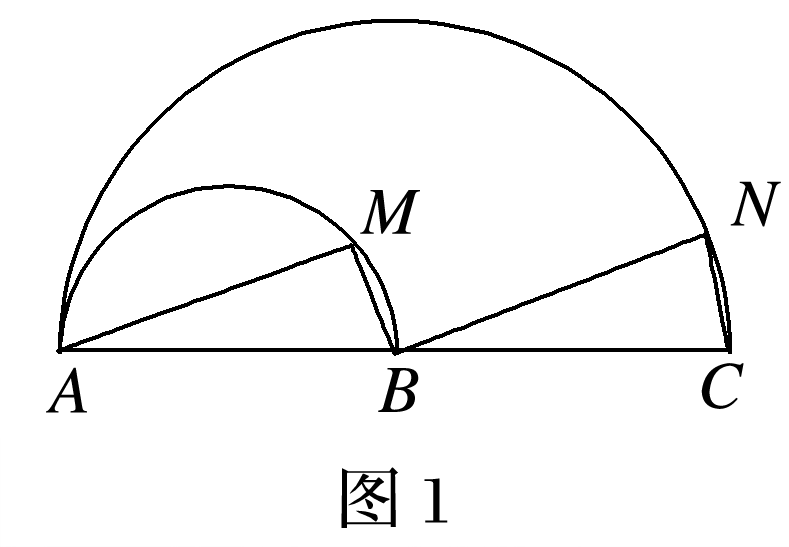
用，表示．

过点*M*的直线与边*OA*，*OB*分别交于点*E*，设，，求的值．

【答案】解：，，设，  
，  
．  
，*M*，*D*三点共线，  
，共线，从而  
又，  
，  
即*C*，*M*，*B*三点共线，  
，共线，  
即    
联立解得  
故．  
，，  
，  
，  
，共线，  
即．  
故：．

【解析】本题考查平面向量的基本定理，向量的加减法以及向量的数乘运算，向量共线的充要条件，属于中档题．  
设，利用向量的减法法则得，结合，共线得到关于*x*，*y*的方程：，同理得联立求解即可得到结论．  
应用题中条件结合中结论得，．  
结合，共线得，整理即可得到欲证结论．  
在平面向量的问题中，存在一种“以平面图形为载体的有关数量积的最大值问题”，通过对该类问题的多解探究，进一步提高分析、解决此类问题的能力．

题目　如图1，已知*AC*＝2，*B*为*AC*的中点，分别以*AB*，*AC*为直径在*AC*同侧作半圆，*M*，*N*分别为两半圆上的动点(不含端点*A*，*B*，*C*)，且*BM*⊥*BN*，则·的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

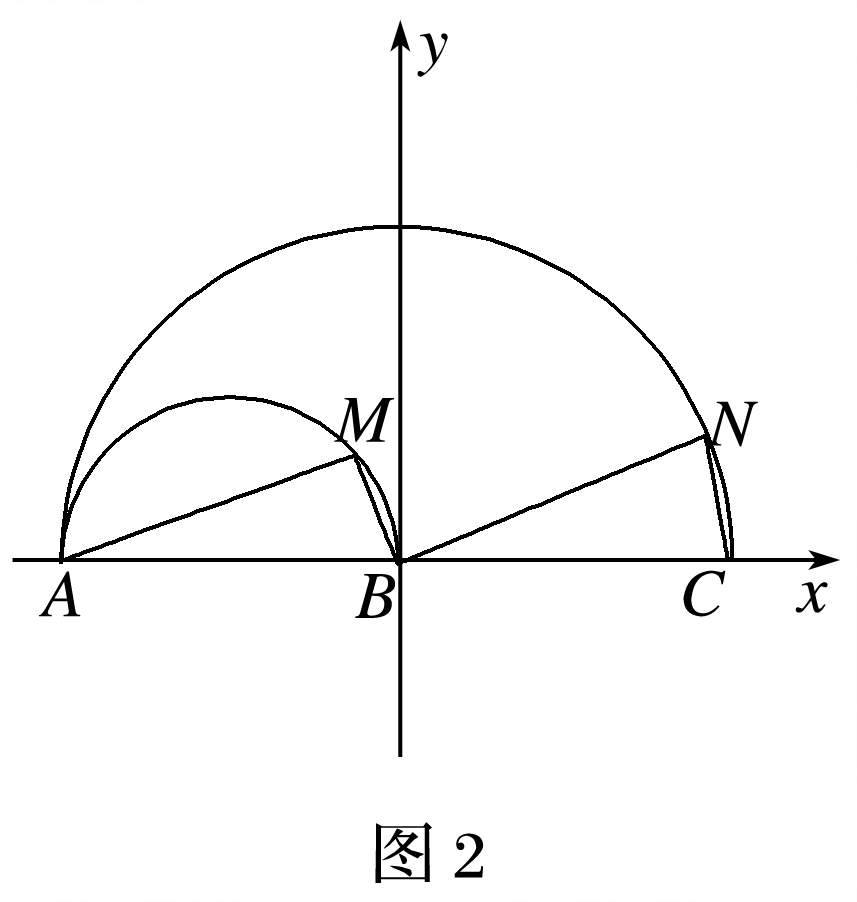


答案

解析　方法一　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1.

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，若设∠*MAB*＝*θ*，则∠*NBC*＝*θ*.

如图2，建立平面直角坐标系*xBy*，则点*A*(－1,0)，*M*(－sin2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，*C*(1,0)，*N*(cos *θ*，sin *θ*)，



所以＝(－sin2*θ*＋1，sin *θ*cos *θ*)＝(cos2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，＝(cos *θ*－1，sin *θ*)．

于是，·＝cos2*θ*·(cos *θ*－1)＋sin2*θ*cos *θ*

＝cos3*θ*－cos2*θ*＋(1－cos2*θ*)·cos *θ*

＝－cos2*θ*＋cos *θ*＝－2.

又易知0<*θ*<，所以，当*θ*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的切入点是引入辅助角*θ*，准确写出点*M*，*N*的坐标，以便灵活利用平面向量的坐标运算加以求解．

方法二　如方法一中图2，建立平面直角坐标系*xBy*，设直线*BN*的方程为*y*＝*kx*(*k*>0)，则因为*BM*⊥*BN*，所以直线*BM*的方程为*y*＝－*x*.

注意到点*N*是直线*BN*与以*AC*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝*kx*与*x*2＋*y*2＝1联立，可求得点*N*的坐标为.

注意到点*M*是直线*BM*与以*AB*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝－*x*与2＋*y*2＝联立，可求得点*M*的坐标为.

又*A*(－1,0)，*C*(1,0)，

所以向量＝，＝，

所以·＝＋·

＝

＝－

＝－2，

故当＝，即*k*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是引入参数*k*(直线*BN*的斜率)，并借助直线和圆的方程，灵活求解点*M*，*N*的坐标，整个求解过程显然比方法一增加了许多运算量．

方法三　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1，

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，

所以·＝||×1×cos 0°＝||.

因为*AM*⊥*BM*，*AB*＝1，

所以||＝1×cos∠*MAB*＝cos∠*MAB*，

所以·＝·

＝||×1×cos∠*MAB*＝||2.

于是，·＝·(－)

＝·－·

＝||－||2＝－2.

又0<||<1，

所以，当||＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是充分利用平面向量的数量积公式***a***·***b***＝|***a***|·|***b***|cos *θ*，将目标问题等价转化为求解关于“||”的二次函数在区间(0,1)上的最大值．

方法四　如图3，分别延长*AM*，*CN*，设其交点为*E*，并设*ME*与大半圆的交点为*D*，连接*CD*，则易知*AM*⊥*MB*，*AD*⊥*DC*，所以*BM*∥*CD*，又*B*为*AC*的中点，

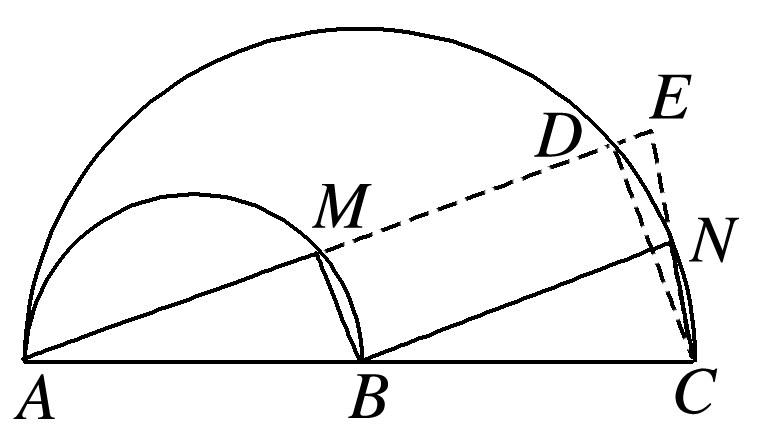


图3

所以*M*为*AD*的中点，

所以＝.

又易知∥，且*B*为*AC*的中点，所以*N*为*CE*的中点，所以＝.

于是，·＝·

＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°

＝||·||.

因为*BN*为△*ACE*的中位线，

所以||＋||＝||＝2||＝2.

从而，·＝||·||

≤2＝×2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*AE*的中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作辅助线，充分利用相关平面几何知识，先获得＝和＝，然后再综合利用向量的几何意义、数量积运算、三角形中位线性质定理以及基本不等式的变形式“*ab*≤2”加以灵活求解．

方法五　如图4，以*BC*为直径画半圆，交*BN*于点*D*，连接*CD*，则*BD*⊥*CD*.又易知*AM*∥*BD*，且*AM*＝*BD*，

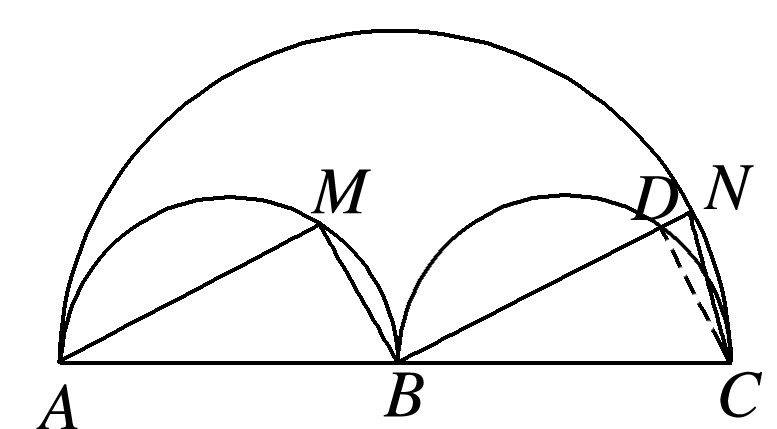


图4

所以·＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°＝||·||

≤2＝2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*BN*中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作“半圆”，先将目标问题等价转化为求||·||的最大值，再灵活利用基本不等式的变形巧求最大值．显然，该解法最简单，故值得我们细细品味、深思！

综上，不同的思维切入点，往往可获得不同的解题体验，真可谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，需要我们在学中“悟”，在“悟”中不断提升解题技巧．