**泉州七中2020级高一下学期数学限时训练（2）**2021-3-12

 组卷人：梁木华

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| **答案** | **B** | **C** | **D** | **B** | **C** | **A** | **A** | **A** | **ABD** | **AD** | **CD** | **ACD** |

一、选择题（本大题共**8**小题，共**40**分）

1. 下列结论中正确的为$($      $)$

A. 两个有共同起点的单位向量，其终点必相同 B. 向量$\vec{AB}$与向量$\vec{BA}$的长度相等
C. 对任意向量$\vec{a}$，$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$是一个单位向量 D. 零向量没有方向

【答案】*B* 【解答】解：*A*选项，单位向量的方向任意，所以当起点相同时，终点在以起点为圆心的单位圆上，终点不一定相同，故*A*不正确$;$
*B*选项，向量$\vec{AB}$与向量$\vec{BA}$是相反向量，方向相反，长度相等，故*B*正确$;$
*C*选项，当$\vec{a}=\vec{0}$时，$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$无意义，故*C*不正确$;$
*D*选项，零向量的方向是任意的，而不是没有方向，故*D*不正确．
故选*B*．

1. 如图所示，$△ABC$是顶角为$120°$ 的等腰三角形，且$AB=1$，则$\vec{AB}⋅\vec{BC}=(    )$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】*C* 解：$△ABC$是顶角为$120°$ 的等腰三角形，且$AB=1$，则$AC=1$，
则$∠ABC=30°$，$BC=\sqrt{3}$，
则$\vec{AB}⋅\vec{BC}=|\vec{AB}||\vec{BC}|cos(180°-∠ABC)=1×\sqrt{3}×(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}$． 选*C*．

1. 在如图所示的平面直角坐标系中，向量$\vec{AB}$的坐标是$(     )$

A. $\left(2,2\right)$ B. $(2,-2)$ C. $(1,1)$ D. $(-1,-1)$

【答案】*D* 解：因为$A(2,2)$，$B(1,1)$，所以$\vec{AB}=(-1,-1)$，故选*D*．

1. 如图所示，已知在$△ABC$中，*D*是边*AB*上的中点，则$\vec{CD}=($   $)$

A. $\vec{BC}-\frac{1}{2}\vec{BA}$ B. $-\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BA}$
C. $-\vec{BC}-\frac{1}{2}\vec{BA}$ D. $\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BA}$

【答案】*B*

解：方法一：$∵D$是*AB*的中点，
$∴\vec{BD}=\frac{1}{2}\vec{BA}$，
$∴\vec{CD}=\vec{CB}+\vec{BD}=-\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BA}$．

方法二：$\vec{CD}=\frac{1}{2}(\vec{CB}+\vec{CA})=\frac{1}{2}[\vec{CB}+(\vec{CB}+\vec{BA})]=\vec{CB}+\frac{1}{2}\vec{BA}=-\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BA}$．
故选*B*．

1. 已知在$△ABC$中，$\vec{AN}=\frac{1}{3}\vec{NC}$，*P*是*BN*上的一点$.$若$\vec{AP}=m\vec{AB}+\frac{2}{11}\vec{AC}$，则实数*m*的值为     $(     )$

A. $\frac{9}{11}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{3}{11}$ D. $\frac{2}{11}$

【答案】*C*

解：设$\vec{BP}=λ\vec{BN}$，
则$\vec{AP}=\vec{AB}+\vec{BP}=\vec{AB}+λ\vec{BN}=\vec{AB}+λ(\vec{AN}-\vec{AB})=\vec{AB}+λ(\frac{1}{4}\vec{AC}-\vec{AB})=(1-λ)\vec{AB}+\frac{λ}{4}\vec{AC}=m\vec{AB}+\frac{2}{11}\vec{AC}$，$∴\left\{\begin{matrix}\frac{λ}{4}=\frac{2}{11},\\m=1-λ,\end{matrix}\right.$解得$\left\{\begin{matrix}λ=\frac{8}{11},\\m=\frac{3}{11}.\end{matrix}\right.$ 故选*C*．

1. 已知是边长为2的正六边形内的一点，则的取值范围是　　

A． B． C． D．

【思路分析】画出图形，结合向量的数量积转化判断求解即可．

【解析】：画出图形如图，

，它的几何意义是的长度与在向量的投影的乘积，显然，在处时，取得最大值，，可得，最大值为6，

在处取得最小值，，最小值为，

是边长为2的正六边形内的一点，

所以的取值范围是．故选：．



【总结与归纳】本题考查向量的数量积的应用，向量在几何中的应用，是中档题．

1. 如图所示，已知点*G*是$△ABC$的重心，过点*G*作直线分别与*AB*，*AC*两边交于*M*，*N*两点$($点*N*与点*C*不重合$)$，设$\vec{AB}=x\vec{AM}$，$\vec{AC}=y\vec{AN}$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y-1}$的最小值为$(    )$

A. 2 B. $1+\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $2+2\sqrt{2}$

【答案】*A*

【分析】难度适中解：$∵G$为$△ABC$的重心，
$∴\vec{AG}=\frac{2}{3}×\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})=\frac{1}{3}(x\vec{AM}+y\vec{AN})$，且$x\geq 1,y>1$，
又$∵G$在线段*MN*上，$∴\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y=1$，$∴x+y=3$，
$∴x+(y-1)=2$，$∴\frac{1}{x}+\frac{1}{y-1}=\frac{1}{2}[x+(y-1)](\frac{1}{x}+\frac{1}{y-1})=\frac{1}{2}(1+1+\frac{x}{y-1}+\frac{y-1}{x})$
$\geq \frac{1}{2}(2+2)=2$，
当且仅当$\left\{\begin{matrix}x=y-1\\x+\left(y-1\right)=2\end{matrix}\right.$，即$x=1,y=2$时等号成立． 故选*A*．

1. 已知$\vec{e\_{1}}$，$\vec{e\_{2}}$是平面内两个不共线的向量，$\vec{AC}=\vec{e\_{1}}-k\vec{e\_{2}}$，$\vec{CB}=2\vec{e\_{1}}-\vec{e\_{2}}$，$\vec{CD}=3\vec{e\_{1}}-2\vec{e\_{2}}$，若$A,B,D$三点共线，则*k*的值为$($    $)$

A. 2 B. $-3$ C. $-2$ D. 3

【答案】*A* 解：$∵\vec{AC}=\vec{e\_{1}}-k\vec{e\_{2}}$，$\vec{CB}=2\vec{e\_{1}}-\vec{e\_{2}}$，$\vec{CD}=3\vec{e\_{1}}-2\vec{e\_{2}}$，$∴\vec{BD}=\vec{CD}-\vec{CB}$
$=(3\vec{e\_{1}}-2\vec{e\_{2}})-(2\vec{e\_{1}}-\vec{e\_{2}})=\vec{e\_{1}}-\vec{e\_{2}}$，$\vec{AB}=\vec{AC}+\vec{CB}$
$=\vec{e\_{1}}-k\vec{e\_{2}}+2\vec{e\_{1}}-\vec{e\_{2}}=3\vec{e\_{1}}-\left(1+k\right)\vec{e\_{2}}$，
$∵A$、*B*、*D*三点共线，
$∴\vec{AB}$与$\vec{BD}$共线，
$∴$存在唯一的实数$λ$，使得$\vec{AB}=λ\vec{BD}$；
即$3\vec{e\_{1}}-\left(1+k\right)\vec{e\_{2}}=λ\left(\vec{e\_{1}}-\vec{e\_{2}}\right)$，
所以$\left\{\begin{matrix}3=λ\\1+k=λ\end{matrix}\right., $解得$k=2$． 故选*A*．

二、不定项选择题（本大题共**4**小题，共**20**分）

1. 下列说法错误的是$($   $)$

A. 若$\vec{a}⋅\vec{b}$=$\vec{b}⋅\vec{c}$，则$\vec{a}=\vec{c}$ .

B. 若$\vec{a}//\vec{b}$，则存在唯一实数$λ$使得$\vec{a}=λ\vec{b}$
C. 两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$共线且反向
D. 已知$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，且$\vec{a}$与$\vec{a}+λ\vec{b}$的夹角为锐角，则实数$λ$的取值范围是

【答案】*ABD*

解：对于*A*：若$\vec{b}$为零向量，则错误；
对于*B*：若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\vec{a}=λ\vec{b}$  ，如果$\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$，则实数$λ$不唯一，故错误；
对于*C*：两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，可得$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^{2}=\left(\left|\vec{a}\right|+|\vec{b}|\right)^{2}$，
即$-2\vec{a}·\vec{b}=2|\vec{a}||\vec{b}|$，，
则两个向量的夹角为，则$\vec{a}$与$\vec{b}$共线且反向，故正确；
对于*D*：已知$\vec{a}=\left(1,2\right)$，$\vec{b}=\left(1,1\right)$，且$\vec{a}$与$\vec{a}+λ\vec{b}$的夹角为锐角，
可得$\vec{a}·\left(\vec{a}+λ\vec{b}\right)>0$，即$\left|\vec{a}\right|^{2}+λ\vec{a}·\vec{b}>0$，
可得$5+3λ>0$，解得$λ>-\frac{5}{3}$，
当$\vec{a}$与$\vec{a}+λ\vec{b}$的夹角为0时，$\vec{a}+λ\vec{b}=(1+λ,2+λ)$，
所以$2+2λ=2+λ⇒λ=0$，
所以$\vec{a}$与$\vec{a}+λ\vec{b}$的夹角为锐角时$λ>-\frac{5}{3}$且$λ\ne 0$，故错误；故说法错误的是*ABD*．
故选*ABD*．

1. 设是三个非零向量，则正确的有$($     $)$

A. 若，，则；
B. 若，则可构成三角形；
C.
D.

【答案】*AD*

解：对于*A*，因为$\vec{b}$不是零向量，所以$\vec{a}//\vec{c}$，故正确；
对于*B*，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$可能共线，方向不一样；故错；
对于*C*，如果$\vec{b}·\vec{c}=0$，则$\vec{a}·\left(\vec{b}·\vec{c}\right)=\vec{0}$，故错；
对于*D*，向量满足分配律
即$\vec{a}\left[\vec{b}·\left(\vec{a·}\vec{c}\right)-\vec{c·}\left(\vec{a}·\vec{b}\right)\right]=\vec{(a}·\vec{b})·\left(\vec{a·}\vec{c}\right)-(\vec{a}·\vec{c})·(\vec{a}·\vec{b})=0$
故正确．
故选*AD*

**11.** 已知***a***＝(cos *α*，sin *α*)，***b***＝(cos *β*，sin *β*)，*α*，*β*∈(0，π)，且***a***⊥***b***，则下列结论正确的是(　　)

A．*α*＝*β* B．*α*＝*β*＋ C．(***a***＋***b***)⊥(***a***－***b***) D．|***a***＋***b***|＝|***a***－***b***|

答案　CD

解析　∵***a***⊥***b***，∴***a***·***b***＝cos *α*cos *β*＋sin *α*sin*β*＝0，

即cos(*α*－*β*)＝0，

∵*α*，*β*∈(0, π)，∴*α*－*β*＝±，故A，B错误．

又(***a***＋***b***)·(***a***－***b***)＝|***a***|2－|***b***|2＝1－1＝0，

∴(***a***＋***b***)⊥(***a***－***b***)，故C正确．

(***a***＋***b***)2＝***a***2＋2***a***·***b***＋***b***2＝***a***2＋***b***2＝2，

(***a***－***b***)2＝***a***2－2***a***·***b***＋***b***2＝***a***2＋***b***2＝2，故D正确．

**12．**定义平面向量之间的一种运算“⊙”如下：对任意的***a***＝(*m*，*n*)，***b***＝(*p*，*q*)，令***a***⊙***b***＝*mq*－*np*，下面说法正确的是(　　)

A．若***a***与***b***共线，则***a***⊙***b***＝0 B．***a***⊙***b***＝***b***⊙***a***

C．对任意的*λ*∈**R**，有(*λ****a***)⊙***b***＝*λ*(***a***⊙***b***) D．(***a***⊙***b***)2＋(***a***·***b***)2＝|***a***|2|***b***|2

答案　ACD

解析　对于A，若***a***与***b***共线，则有*mq*－*np*＝0，

又***a***⊙***b***＝*mq*－*np*，所以***a***⊙***b***＝0，故A正确；

对于B，因为***a***⊙***b***＝*mq*－*np*，而***b***⊙***a***＝*pn*－*qm*，

所以有***a***⊙***b***≠***b***⊙***a***，故B错误；

对于C，(*λ****a***)⊙***b***＝*λqm*－*λpn*，

而*λ*(***a***⊙***b***)＝*λ*(*qm*－*pn*)＝*λqm*－*λpn*，故C正确；

对于D，(***a***⊙***b***)2＋(***a***·***b***)2＝(*qm*－*pn*)2＋(*mp*＋*nq*)2＝(*m*2＋*n*2)(*p*2＋*q*2)＝|***a***|2|***b***|2，D正确．

故选ACD.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| **答案** | **B** | **C** | **D** | **B** | **C** | **A** | **A** | **A** | **ABD** | **AD** | **CD** | **ACD** |

1. 填空题（本大题共**4**小题，共**20**分）

13. 已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=$          ．

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查向量的概念及几何表示，向量的模，向量的线性运算，属于基础题．
设$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，则$\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{a}-\vec{b}$，由$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，得$△OAB$为正三角形，设其边长为1，计算可得．
【解答】
解：如图，设$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，

则$\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{a}-\vec{b}$．

$∵|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，
$∴BA=OA=OB$．

$∴△OAB$为正三角形，设其边长为1， 则$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{BA}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=2×\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．

$∴\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$．

1. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$均为非零向量，$(\vec{a}-2\vec{b})⊥\vec{a}$，$(\vec{b}-2\vec{a})⊥\vec{b}$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解答】
解：由题意得，因为，$(\vec{b}-2\vec{a})⊥\vec{b}$，
所以$(\vec{a}-2\vec{b})⋅\vec{a}=\vec{a}^{2}-2\vec{a}⋅\vec{b}=0$，$(\vec{b}-2\vec{a})⋅\vec{b}=\vec{b}^{2}-2\vec{a}⋅\vec{b}=0$，
即$\vec{a}^{2}=|\vec{a}|^{2}=2\vec{a}⋅\vec{b}$，$\vec{b}^{2}=|\vec{b}|^{2}=2\vec{a}⋅\vec{b}$，
所以，

又$⟨\vec{a},\vec{b}⟩\in [0,π]$， 所以$⟨\vec{a},\vec{b}⟩=\frac{π}{3}$．故答案为．

1. 等边三角形*ABC*中，若$\vec{AP}=λ\vec{AB}+\vec{AC}$，则当$\vec{PB}⋅\vec{PC}$取得最小值时，$λ=$\_\_\_\_\_\_\_

【答案】$\frac{1}{4}$

【解答】解：以*AB*所在的直线为*x*轴，以*AB*的垂直平行线为*y*轴，建立如图所示的直角坐标系，

设等边三角形的边长为2，则$A(-1,0)$，$B(1,0)$，*C*，$(0,\sqrt{3})$，

设$P(x,y)$，

$∵\overset{\to }{AP}=λ\overset{\to }{AB}+\overset{\to }{AC}$，

$∴(x+1,y)=λ(2,0)+(1,\sqrt{3})$，

$∴x=2λ$，$y=\sqrt{3}$，

$$∴\vec{PB}·\vec{PC}=\left(1-x,-y\right)·\left(-x,\sqrt{3}-y\right)=-x\left(1-x\right)-y\left(\sqrt{3}-y\right)=2λ\left(2λ-1\right)=4\left(λ-\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{1}{4}$$

当$λ=\frac{1}{4}$ 时，有最小值， 故答案为$\frac{1}{4}$．

在平面向量的问题中，存在一种“以平面图形为载体的有关数量积的最大值问题”，通过对该类问题的多解探究，进一步提高分析、解决此类问题的能力．

1. 如图1，已知*AC*＝2，*B*为*AC*的中点，分别以*AB*，*AC*为直径在*AC*同侧作半圆，*M*，*N*分别为两半圆上的动点(不含端点*A*，*B*，*C*)，且*BM*⊥*BN*，则·的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．



答案

解析　方法一　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1.

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，若设∠*MAB*＝*θ*，则∠*NBC*＝*θ*.

如图2，建立平面直角坐标系*xBy*，则点*A*(－1,0)，*M*(－sin2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，*C*(1,0)，*N*(cos *θ*，sin *θ*)，



所以＝(－sin2*θ*＋1，sin *θ*cos *θ*)＝(cos2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，＝(cos *θ*－1，sin *θ*)．

于是，·＝cos2*θ*·(cos *θ*－1)＋sin2*θ*cos *θ*

＝cos3*θ*－cos2*θ*＋(1－cos2*θ*)·cos *θ*

＝－cos2*θ*＋cos *θ*＝－2.

又易知0<*θ*<，所以，当*θ*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的切入点是引入辅助角*θ*，准确写出点*M*，*N*的坐标，以便灵活利用平面向量的坐标运算加以求解．

方法二　如方法一中图2，建立平面直角坐标系*xBy*，设直线*BN*的方程为*y*＝*kx*(*k*>0)，则因为*BM*⊥*BN*，所以直线*BM*的方程为*y*＝－*x*.

注意到点*N*是直线*BN*与以*AC*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝*kx*与*x*2＋*y*2＝1联立，可求得点*N*的坐标为.

注意到点*M*是直线*BM*与以*AB*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝－*x*与2＋*y*2＝联立，可求得点*M*的坐标为.

又*A*(－1,0)，*C*(1,0)，

所以向量＝，＝，

所以·＝＋·

＝＝－＝－2，

故当＝，即*k*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是引入参数*k*(直线*BN*的斜率)，并借助直线和圆的方程，灵活求解点*M*，*N*的坐标，整个求解过程显然比方法一增加了许多运算量．

方法三　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1，

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，

所以·＝||×1×cos 0°＝||.

因为*AM*⊥*BM*，*AB*＝1，

所以||＝1×cos∠*MAB*＝cos∠*MAB*，

所以·＝·

＝||×1×cos∠*MAB*＝||2.

于是，·＝·(－)

＝·－·

＝||－||2＝－2.

又0<||<1，

所以，当||＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是充分利用平面向量的数量积公式***a***·***b***＝|***a***|·|***b***|cos *θ*，将目标问题等价转化为求解关于“||”的二次函数在区间(0,1)上的最大值．

方法四　如图3，分别延长*AM*，*CN*，设其交点为*E*，并设*ME*与大半圆的交点为*D*，连接*CD*，则易知*AM*⊥*MB*，*AD*⊥*DC*，所以*BM*∥*CD*，又*B*为*AC*的中点，



图3

所以*M*为*AD*的中点，

所以＝.

又易知∥，且*B*为*AC*的中点，所以*N*为*CE*的中点，所以＝.

于是，·＝·

＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°

＝||·||.

因为*BN*为△*ACE*的中位线，

所以||＋||＝||＝2||＝2.

从而，·＝||·||

≤2＝×2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*AE*的中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作辅助线，充分利用相关平面几何知识，先获得＝和＝，然后再综合利用向量的几何意义、数量积运算、三角形中位线性质定理以及基本不等式的变形式“*ab*≤2”加以灵活求解．

方法五　如图4，以*BC*为直径画半圆，交*BN*于点*D*，连接*CD*，则*BD*⊥*CD*.又易知*AM*∥*BD*，且*AM*＝*BD*，



图4

所以·＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°＝||·||

≤2＝2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*BN*中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作“半圆”，先将目标问题等价转化为求||·||的最大值，再灵活利用基本不等式的变形巧求最大值．显然，该解法最简单，故值得我们细细品味、深思！

综上，不同的思维切入点，往往可获得不同的解题体验，真可谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，需要我们在学中“悟”，在“悟”中不断提升解题技巧．

17. （解答题**20**分）17.已知向量***m***＝(2cos *ωx*，－1)，***n***＝(sin *ωx*－cos *ωx*,2)，其中*ω*>0，函数*f* (*x*)＝***m***·***n***＋3，若函数*f* (*x*)图象的两个相邻对称中心的距离为.

(1)求函数*f* (*x*)的单调递增区间；

(2)将函数*f* (*x*)的图象先向左平移个单位长度，然后纵坐标不变，横坐标缩短为原来的，得到函数*g*(*x*)的图象，当*x*∈时，求函数*g*(*x*)的值域．

解　(1)由题意可得*f* (*x*)＝***m***·***n***＋3

＝2cos *ωx*(sin *ωx*－cos *ωx*)－2＋3

＝2sin *ωx*cos *ωx*－(2cos2*ωx*－1)

＝sin 2*ωx*－cos 2*ωx*

＝sin.

由题意知，*T*＝＝π，得*ω*＝1，

则*f* (*x*)＝sin.

由2*k*π－≤2*x*－≤2*k*π＋，*k*∈**Z**，

解得*k*π－≤*x*≤*k*π＋，*k*∈**Z**，

∴*f* (*x*)的单调递增区间为，*k*∈**Z**.

(2)将*f* (*x*)的图象向左平移个单位长度，得到*y*＝sin的图象，

纵坐标不变，横坐标缩短为原来的，

得到*g*(*x*)＝sin的图象．

∵*x*∈，∴4*x*＋∈，

∴－1≤sin≤，

故函数*g*(*x*)的值域为[－，1]

备用：

1. 如图，在$△AOB$中，*D*是边*OB*的中点，*C*是边*OA*上靠近点*O*的一个三等分点，*AD*与*BC*交于点$M.$设$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$．

$(1)$用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\vec{OM}$．

$(2)$过点*M*的直线与边*OA*，*OB*分别交于点*E*，$F.$设$\vec{OE}=p\vec{a}$，$\vec{OF}=q\vec{b}$，求$\frac{1}{p}+\frac{2}{q}$的值．

【答案】解：$(1)∵\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$，设$\vec{OM}=x\vec{a}+y\vec{b}$，
$∴\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}=(x-1)\vec{OA}+y\vec{OB}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$，
$\vec{AD}=\vec{OD}-\vec{OA}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$．
$∵A$，*M*，*D*三点共线，
$∴\vec{AM}$，$\vec{AD}$共线，从而$\frac{1}{2}(x-1)=-y.①$
$∵$又$\vec{BM}=\vec{OM}-\vec{OB}=x\vec{OA}+\left(y-1\right)\vec{OB}=x\vec{a}+\left(y-1\right)\vec{b}$，
$\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$，
即*C*，*M*，*B*三点共线，
$∴\vec{BM}$，$\vec{BC}$共线，
即$\frac{1}{3}(y-1)=-x.$  $②$
联立$①②$解得$\left\{\begin{matrix}x=\frac{1}{5}\\y=\frac{2}{5}\end{matrix}\right.,$
故$\vec{OM}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$．
$(2)∵\vec{OE}=p\vec{a}$，$\vec{OF}=q\vec{b}$，
$∴\vec{EM}=\vec{OM}-\vec{OE}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}-p\vec{a}=(\frac{1}{5}-p)\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$，
$\vec{EF}=\vec{OF}-\vec{OE}=q\vec{b}-p\vec{a}$，
$∵\vec{EM}$，$\vec{EF}$共线，
$∴(\frac{1}{5}-p)q=-\frac{2}{5}p$即$\frac{q}{5}+\frac{2p}{5}=pq$．
故：$\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=5$．

【解析】本题考查平面向量的基本定理，向量的加减法以及向量的数乘运算，向量共线的充要条件，属于中档题．
$(1)$设$\vec{OM}=x\vec{a}+y\vec{b}$，利用向量的减法法则得$\vec{AM}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$，$\vec{AD}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$结合$\vec{AM}$，$\vec{AD}$共线得到关于*x*，*y*的方程：$\frac{1}{2}(x-1)=-y$，同理得$\frac{1}{3}(y-1)=-x$联立求解即可得到结论．
$(2)$应用题中条件结合$(1)$中结论得$\vec{EM}=\vec{OM}-\vec{OE}=(\frac{1}{5}-p)\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$，$\vec{EF}=\vec{OF}-\vec{OE}=q\vec{b}-p\vec{a}$．
结合$\vec{EM}$，$\vec{EF}$共线得$(\frac{1}{5}-p)q=-\frac{2}{5}p$，整理即可得到欲证结论．
在平面向量的问题中，存在一种“以平面图形为载体的有关数量积的最大值问题”，通过对该类问题的多解探究，进一步提高分析、解决此类问题的能力．

题目　如图1，已知*AC*＝2，*B*为*AC*的中点，分别以*AB*，*AC*为直径在*AC*同侧作半圆，*M*，*N*分别为两半圆上的动点(不含端点*A*，*B*，*C*)，且*BM*⊥*BN*，则·的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．



答案

解析　方法一　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1.

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，若设∠*MAB*＝*θ*，则∠*NBC*＝*θ*.

如图2，建立平面直角坐标系*xBy*，则点*A*(－1,0)，*M*(－sin2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，*C*(1,0)，*N*(cos *θ*，sin *θ*)，



所以＝(－sin2*θ*＋1，sin *θ*cos *θ*)＝(cos2*θ*，sin *θ*cos *θ*)，＝(cos *θ*－1，sin *θ*)．

于是，·＝cos2*θ*·(cos *θ*－1)＋sin2*θ*cos *θ*

＝cos3*θ*－cos2*θ*＋(1－cos2*θ*)·cos *θ*

＝－cos2*θ*＋cos *θ*＝－2.

又易知0<*θ*<，所以，当*θ*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的切入点是引入辅助角*θ*，准确写出点*M*，*N*的坐标，以便灵活利用平面向量的坐标运算加以求解．

方法二　如方法一中图2，建立平面直角坐标系*xBy*，设直线*BN*的方程为*y*＝*kx*(*k*>0)，则因为*BM*⊥*BN*，所以直线*BM*的方程为*y*＝－*x*.

注意到点*N*是直线*BN*与以*AC*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝*kx*与*x*2＋*y*2＝1联立，可求得点*N*的坐标为.

注意到点*M*是直线*BM*与以*AB*为直径的半圆的交点，所以将*y*＝－*x*与2＋*y*2＝联立，可求得点*M*的坐标为.

又*A*(－1,0)，*C*(1,0)，

所以向量＝，＝，

所以·＝＋·

＝

＝－

＝－2，

故当＝，即*k*＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是引入参数*k*(直线*BN*的斜率)，并借助直线和圆的方程，灵活求解点*M*，*N*的坐标，整个求解过程显然比方法一增加了许多运算量．

方法三　由题设可知*AB*＝*BC*＝*BN*＝1，

因为点*M*在以*AB*为直径的半圆上，所以*AM*⊥*BM*，又*BM*⊥*BN*，所以*AM*∥*BN*，

所以·＝||×1×cos 0°＝||.

因为*AM*⊥*BM*，*AB*＝1，

所以||＝1×cos∠*MAB*＝cos∠*MAB*，

所以·＝·

＝||×1×cos∠*MAB*＝||2.

于是，·＝·(－)

＝·－·

＝||－||2＝－2.

又0<||<1，

所以，当||＝时，可得·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是充分利用平面向量的数量积公式***a***·***b***＝|***a***|·|***b***|cos *θ*，将目标问题等价转化为求解关于“||”的二次函数在区间(0,1)上的最大值．

方法四　如图3，分别延长*AM*，*CN*，设其交点为*E*，并设*ME*与大半圆的交点为*D*，连接*CD*，则易知*AM*⊥*MB*，*AD*⊥*DC*，所以*BM*∥*CD*，又*B*为*AC*的中点，



图3

所以*M*为*AD*的中点，

所以＝.

又易知∥，且*B*为*AC*的中点，所以*N*为*CE*的中点，所以＝.

于是，·＝·

＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°

＝||·||.

因为*BN*为△*ACE*的中位线，

所以||＋||＝||＝2||＝2.

从而，·＝||·||

≤2＝×2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*AE*的中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作辅助线，充分利用相关平面几何知识，先获得＝和＝，然后再综合利用向量的几何意义、数量积运算、三角形中位线性质定理以及基本不等式的变形式“*ab*≤2”加以灵活求解．

方法五　如图4，以*BC*为直径画半圆，交*BN*于点*D*，连接*CD*，则*BD*⊥*CD*.又易知*AM*∥*BD*，且*AM*＝*BD*，



图4

所以·＝·(＋)

＝·＋·

＝0＋||·||cos 0°＝||·||

≤2＝2＝，

当且仅当||＝||，即*D*为*BN*中点时不等式取等号．

故所求·的最大值为.

评注　上述求解过程的关键是巧作“半圆”，先将目标问题等价转化为求||·||的最大值，再灵活利用基本不等式的变形巧求最大值．显然，该解法最简单，故值得我们细细品味、深思！

综上，不同的思维切入点，往往可获得不同的解题体验，真可谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，需要我们在学中“悟”，在“悟”中不断提升解题技巧．